

國立臺南第一高級中學 114 學年度學術性向資優鑑定

【數理類】複選第二階段《數學》實作評量

各位同學好，作答之前，請詳閱以下注意事項：

1. 手機請務必關機，手錶鬧鐘鬧鈴設定請取消，並將手機放置於前方指定位置。
2. 桌上僅放置評量證及文具。
3. 遲到逾 20 分鐘者不得進入試場，考試開始 30 分鐘內不准出場。
4. 本次試題共 6 題「填充題」及 4 題「計算或證明題」。
5. 請作答於答題卷上，「填充題」不須列出計算過程，「計算或證明題」須列出過程，請將答案填入答題卷中各題指定之答案欄位。
6. 請於題本空白處計算，於空白處之作答者不予計分。
7. 考生不得將試題本及答題卷攜出試場，違者該科不予計分。
8. 請用黑色或藍色墨水的筆作答，不得使用鉛筆。
9. 請務必在試題本封面與答題卷填入姓名及評量證號碼。
10. 考試時間 09:40~11:00，共 80 分鐘。

☆ 鈴響前請勿翻開試題本 ☆

評量證號碼：□□□□□

=====請翻頁作答=====



【填充題】60% (每題 10 分，請將答案填入答題卷的指定欄位中)

1. 設 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ ，則 $\frac{x^3 + x + 1}{x^5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 正方形 $ABCD$ 中， E 為 $\overline{CD}$ 中點，連接 $\overline{BE}$ ，設 F 、 G 、 H 分別在 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BE}$ 上，使得四邊形 $EFGH$ 為矩形，則矩形 $EFGH$ 與正方形 $ABCD$ 之面積比值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知 a 、 b 、 c 為正整數 ($a \geq b \geq c$)，且滿足

$$a^2 - b^2 - c^2 + ab = 2011, \quad a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2bc - 2ca = -1997,$$

則 $a = ?$

4. 若四位數 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$ 滿足 $a+b=c+d$ 稱為「好數」。在所有四位數中任取一數，則該數為「好數」的機率為 _____。

5. 設 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 均為實數，且 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$ ，若 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$ ，
則 a_{20} 的 (1) 最大值為 _____；【5 分】 (2) 最小值為 _____。【5 分】

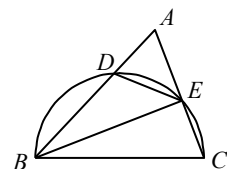
6. 設三整數 x, y, z 不全為 1，若 $x+y+z=3$ 且 $x^3+y^3+z^3=3$ ，則 $x^2+y^2+z^2$
= _____。

【計算與證明題】40%

(每題 10 分，沒有與答案相關的列式一律不予計分)

7. 如右圖，以 $\triangle ABC$ 之 $\overline{BC}$ 邊為直徑作半圓，且分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D 、 E 兩點，

若 $\overline{DE} = \overline{EC} = 4$ ，且 $\overline{BC} - \overline{BD} = \frac{16}{5}$ ，求 $\overline{BC} \cdot \overline{BD}$ 之值。

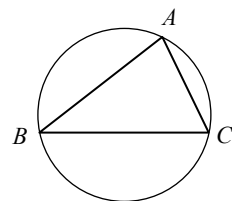


8. 已知「托勒密 (Ptolemy) 定理」：

若 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ 。

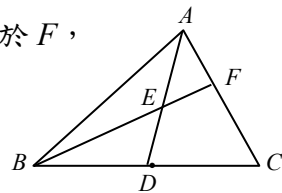
設 $\triangle ABC$ 之三邊長為連續正整數，且最大角為最小角的2倍，

試以「托勒密定理」求此三邊長。



9. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 的中線， E 在 $\overline{AD}$ 上，作直線 BE 交 $\overline{AC}$ 於 F ，

若 $\overline{AF} = \overline{EF}$ ，試證： $\overline{BE} = \overline{AC}$ 。



10. 設 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 均為正整數，令 $T(n, k)$ 表使得等式 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ 成立的數值組合解 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 的個數。舉例來說：滿足 $a_1 + a_2 = 5$ 之數值組合 (a_1, a_2) 有 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 共 4 組，我們也可以用表列形式呈現如下：

(a_1, a_2)	$(1, 4)$	$(2, 3)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$
a_1	1	2	3	4
a_2	4	3	2	1

所以，我們得到 $T(5, 2) = 4$ 。

(1) 試求： $T(4, 2), T(6, 2), T(7, 2)$ 之值；【3 分】

(2) 試求： $T(8, 3)$ 之值；【2 分】

(3) 試證： $T(n, k) = T(n-1, k-1) + T(n-2, k-1) + \dots + T(k, k-1) + T(k-1, k-1)$ 。

【5 分】

