

國立臺南第一高級中學 114 學年度學術性向資優鑑定

【數理類】複選第一階段《數學》成就評量試題

各位同學好，作答之前，請詳閱以下注意事項：

1. 手機務必關機，手錶鬧鐘鬧鈴設定請取消，並將手機放置於前方指定位置。
2. 桌上僅放置評量證及文具，作答時**不可**使用量角器，若有攜帶附量角器功能之任何工具，請放在教室前方指定位置。
3. 遲到逾 20 分鐘者不得進入試場，考試開始 30 分鐘內不准出場。
4. 考生不得將試題及答案卡（卷）攜出試場，違者該科不予計分。
5. 請依照評量證號碼，將後四碼中的第一碼劃記在答案卡『班級』欄的『十位』數，第二碼劃記在『班級』欄的個位數，第三碼劃記在『座號』欄的『十位』數，第四碼劃記在『座號』欄的個位數。

例如：評量證號碼為 10135 者，

請在班級欄的十位數劃記 0，個位數劃記 1；

在座號欄的十位數劃記 3，個位數劃記 5。

6. 請務必在答案卡姓名欄填入姓名。未於答案卡上作答者，不予計分
7. 評量時間為 80 分鐘，08:40 開始，10:00 結束。
8. 本次試題共 20 題「選填題」，每題 5 分，滿分 100 分，題號以 A、B、C、...標示，作答時請用 2B 鉛筆劃卡，請將選項塗黑、塗滿。
9. 題目中所提供的圖形只供參考，不代表實際上之大小。
10. 請將所有答案簡化至最簡，否則不予計分。
11. **每題答案全對才給分。**
12. 選填題作答劃記說明：請仔細閱讀下面的例子。

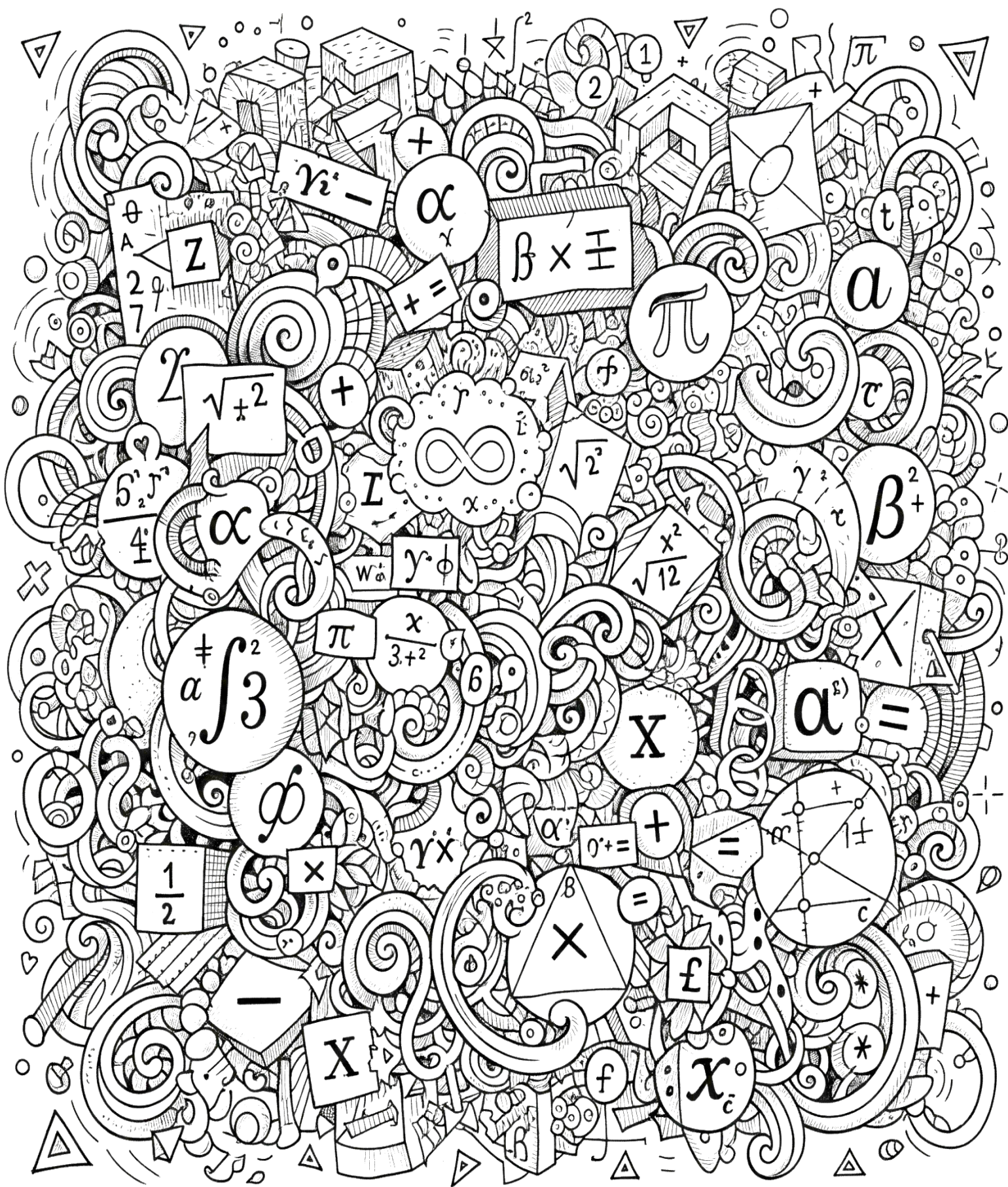
例如 E 題，其作答題號為 $\frac{8^{\textcircled{9}}}{10}$ ，若你認為該題答案為 $-\frac{2}{3}$ ，就

請如右圖劃記

8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

13. 聽到鈴聲響起，請於試題本右上角方格內填寫評量證號碼，再翻頁作答。

☆ 鈴響前請勿翻開試題本 ☆



A. 設 $x+y=10$ ，且 $x^3+y^3=100$ ，則 $x^2+y^2=\underline{\textcircled{1}\textcircled{2}}$ 。

B. 正數 x 滿足 $x^2+x-3=0$ ，若 $x^3=a\sqrt{b}+c$ （已化至最簡形式，其中 a 、 b 、 c 均為整數），則 $a+b+c=\underline{\textcircled{3}\textcircled{4}}$ 。

C. 已知 $\sqrt{17}$ 的小數部分為 x ，得 $2x^3+15x^2-7x-4$ 之值為 $a\sqrt{17}-b$ ，其中 a 、 b 均為正整數，則數對 $(a, b) = \underline{(\textcircled{5}, \textcircled{6}\textcircled{7})}$ 。

D. 某三位數 x 滿足「以 6 除 x^2 得餘數為 4」，則此三位數 x 共有 $\underline{\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 個。

E. 若整數 $N=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots 9}_{2025\text{位數}}$ ，則 N 的所有位數之數字和為 20 ⑪⑫。

F. 13^{2025} 除以 8 的餘數為 13 ⑬。

G. 房間內有編號 1 到 1000 號的燈泡開關，剛開始都是關閉的。現在有編號 1 到 1000 號的 1000 個同學依號碼順序進入房間，並規定編號 i 的同學針對編號 i 的倍數的開關按一下（「開」按一下變「關」，「關」按一下變「開」），則最後結束時有 10 ⑭⑮ 盞燈是亮的。

H. 已知三正整數 a, b, c ($a < b < c$) 均為質數，且 $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{11}$ ，則所得的序組

(a, b, c) 會有兩組答案，所以其 $a+b+c$ 之和也會有兩個答案 α, β ，

則 $\alpha + \beta =$ 16 ⑯⑰。

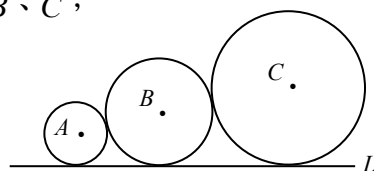
- I. 設函數 f 滿足對所有實數 $x \neq 0$ 恆有 $3f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ，得 $f(x) = \frac{px^2 + q}{rx}$ ，
則 $p + q + r = \underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

- J. 如圖（示意圖），由左至右有三個圓的圓心分別為 A 、 B 、 C ，

其半徑分別為 8、13、18，這三個圓均與直線 L 相切，

且圓 A 與圓 B 相切，圓 B 與圓 C 相切，

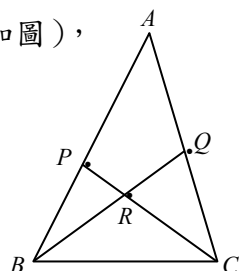
則圓心 A 到圓心 C 的距離為 $\underline{\textcircled{20}\textcircled{21}\sqrt{\textcircled{22}}}$ 。



- K. 給定 $\triangle ABC$ ， P 在 $\overline{AB}$ 上， Q 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BQ}$ 與 $\overline{CR}$ 相交於 R 點（如圖），

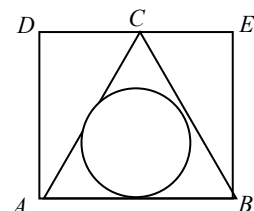
已知 $\triangle BPR$ 、 $\triangle BCR$ 與 $\triangle CQR$ 的面積分別為 10、20 與 15，

則四邊形 $APRQ$ 的面積為 $\underline{\textcircled{23}\textcircled{24}}$ 。



- L. 如右圖， $\triangle ABC$ 為正三角形，其頂點 C 在矩形 $ABED$ 的 $\overline{DE}$ 邊上，
已知 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑為 1（如圖所示），則矩形 $ABED$ 的外接

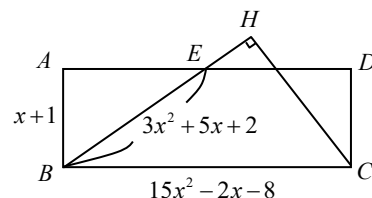
圓面積為 $\underline{\frac{\textcircled{25}\textcircled{26}}{\textcircled{27}}\pi}$ 。



M. 已知銳角三角形的三邊長為三個連續正整數，且周長不超過 100，則此銳角三角形有 28 29 種可能。

N. 設 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 30}) = 45$ ，則 $x\sqrt{y^2 + 30} + y\sqrt{x^2 + 1} = \frac{30 \ 31 \ 32}{33}$ 。

O. 有矩形 $ABCD$ 如圖，已知各段長度 $\overline{BC} = (15x^2 - 2x - 8)$ ，
 $\overline{AB} = (x + 1)$ ， $\overline{BE} = (3x^2 + 5x + 2)$ ，則 $\overline{CH}$ 之長為 $34x - 35$ 。



P. 有一等腰梯形 $ABCD$ ，上底 $\overline{AB} = 630$ ，下底 $\overline{CD} = 820$ ，兩腰 $\overline{AD} = \overline{BC} = 410$ 。

若 $\angle A$ 、 $\angle D$ 的角平分線相交於 P 點，而 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線相交於 Q 點，
 則 $\overline{PQ}$ 之長度為 36 37 38。

Q. 設數列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等差數列，已知 $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} = 33$ ， $a_{12} + a_{13} + \dots + a_n = 807$
 ($n > 10$) 且 $a_{n-5} = 53$ ，則項數 $n = \underline{\textcircled{39} \textcircled{40}}$ 。

R. 一個六邊形的六個內角都是 120° ，連續四邊的長依序為 1、3、3、2，
 則此六邊形的周長為 $\textcircled{41} \textcircled{42}$ 。

S. 先生為了要存錢幫七月份生日的太太買生日禮物，特別在六月份實施存錢計畫：6 月 1 日存 50 元，6 月 2 日存 70 元，6 月 3 日存 90 元，……，如此以每天增加 20 元的金額儲蓄著，直到 6 月 n 日達最大存錢金額時，由於感覺每天負擔太重，之後從隔天開始，以每天減少 15 元繼續儲蓄著，直到 6 月 30 日儲蓄完最後一筆錢 m 後，總計儲蓄了 7470 元，則 $m+n = \underline{\textcircled{43} \textcircled{44}}$ 。

T. 如右圖， $ABCD$ 是邊長為 10 的正方形， $\overline{BF} \parallel \overline{AC}$ ，
 $AEFC$ 為菱形，若 $\angle ACF = x^\circ$ ，且菱形 $AEFC$ 之面積為 y ，
 則 $x+y = \underline{\textcircled{46} \textcircled{47} \textcircled{48}}$ 。

