

國立臺南第一高級中學 113 學年度學術性向資優鑑定

【數理類】複選第一階段《數學》成就評量試題

各位同學好，作答之前，請詳閱以下注意事項：

1. 手機務必關機，手錶鬧鐘鬧鈴設定請取消，並將手機放置於前方指定位置。
2. 桌上僅放置評量證及文具，作答時不可使用量角器，若有攜帶附量角器功能之任何工具，請放在教室前方指定位置。
3. 遲到逾 20 分鐘者不得進入試場，考試開始 30 分鐘內不准出場。
4. 考生不得將試題及答案卡（卷）攜出試場，違者該科不予計分。
5. 請依照評量證號碼，將後四碼中的第一碼劃記在答案卡『班級』欄的『十位』數，第二碼劃記在『班級』欄的個位數，第三碼劃記在『座號』欄的『十位』數，第四碼劃記在『座號』欄的個位數。

例如：准考證號碼為 20134 者，

請在班級欄的十位數劃記 0，個位數劃記 1；

在座號欄的十位數劃記 3，個位數劃記 4。

6. 請務必在答案卡姓名欄填入姓名。未於答案卡上作答者，不予計分
7. 評量時間為 80 分鐘，自 08:40~10:00。
8. 本次試題共 20 題「選填題」，每題 5 分，滿分 100 分，題號以 A、B、C、...標示，作答時請用 2B 鉛筆劃卡，請務必將選項塗黑、塗滿。
9. 題目中所提供的圖形只供參考，不代表實際上之大小。
10. 請將所有答案簡化至最簡，否則不予計分。
11. 每題答案全對才給分。
12. 選填題作答劃記說明：請仔細閱讀下面的例子。

(1) 例如 C 題為單選題，其作答題號為 ②，若你認為答案為選項(5)，

就請如此劃記

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(2) 例如 E 題為填充題，其作答題號為 $\frac{8}{9}$ ，若你認為該題答案為 $-\frac{2}{3}$ ，

就請如此劃記

8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

13. 請聽到鈴聲響起，於試題本右上角方格內填寫評量證號碼，再翻頁作答。

☆ 鈴響前請勿翻開試題本 ☆

一、單選題：每題 5 分，共 70 分。

1. n 是正整數且滿足 $\frac{2n+7}{n+2} < \sqrt{5} < \frac{2n+5}{n+1}$ 求 $n=?$

- (1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 14 (5) 15

2. 若同時投擲 3 粒公正不同的骰子，則出現點數之乘積為 8 的倍數共有多少種？

- (1) 52 (2) 62 (3) 72 (4) 82 (5) 92

3. 設 $a^2 - 4a + 2 = 0$ ，試求 $\frac{a^5 - 5a^4 + 2a^3 + 8a^2 - 12}{a^2 + 2} =$

- (1) -1 (2) -2 (3) -3 (4) -4 (5) -5

4. 設 ABCD 為一個面積=24，邊長 $\overline{AB} = 6$ 之菱形， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 於 E，P 在 $\overline{BD}$ 上，求 $\overline{PE} + \overline{PC}$ 之最小值？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

5. 有四個正整數其倒數和為 $\frac{19}{20}$, 其中三個數之比為 1:2:3. 試求四個正整數中最大的為?

- (1) 20 (2) 30 (3) 40 (4) 50 (5) 60

6. 設 $x > y > z > 0$, 求滿足 $\sqrt{2448} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ 的整數解 (x, y, z) 有多少組?

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 7

7. $\sqrt{40^2+1} + \sqrt{40^2+2} + \dots + \sqrt{40^2+k} + \dots + \sqrt{40^2+80} = n + \alpha$, n 正整數, $0 \leq \alpha < 1$, $n =$

- (1) 3240 (2) 3340 (3) 3440 (4) 3540 (5) 3640

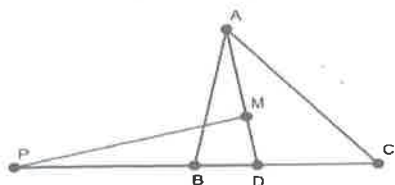
8. 若實數 x, y 滿足 $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{(5-x)(5-y)} = 4 \\ \sqrt{x(5-y)} + \sqrt{y(5-x)} = 5 \end{cases}$, 且 $0 < x, y < 5$, 求 $x^2 + y^2 - xy =$

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

9. 如下圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} < \overline{AC}$, $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線 與 $\overline{BC}$ 相交於 D 點, $\overline{PM}$ 為 $\overline{AD}$ 之中垂

線與 $\overline{BC}$ 交於 P 點, $\overline{PB} = 9$, $\overline{PC} = 16$, $\overline{CD} =$ (圖形僅供參考, 不代表實際上之大小)

- (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 8 (5) 10



10. 設實數 m 使得方程式 $x^4 - (6m+7)x^2 + 9m^2 = 0$ 有四個實根且此四根成等差數列, 求 m 最

大值 ?

- (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{7}{4}$ (4) $\frac{9}{4}$ (5) $\frac{11}{4}$

11. 以知 $9^t = a$, $12^t = b$, t 為一實數, 若 $a + b = 16^t$, 試求 $\frac{a^2 - b^2}{ab} =$

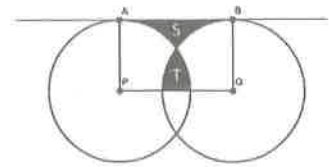
- (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) -1 (5) $2\sqrt{5}$

12. 試求 $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} =$

- (1) 1 (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{99}}$ (4) $\frac{9}{10}$ (5) $\frac{10}{9}$

13. 二個圓心分別為 P, Q 且二個圓的半徑都為 8, 二圓交於二點, $\overline{AB}$ 為其公切線且 T 區域面積 =

S 區域面積, 試求 $PQ =$ (圖形僅供參考, 不代表實際上之大小)

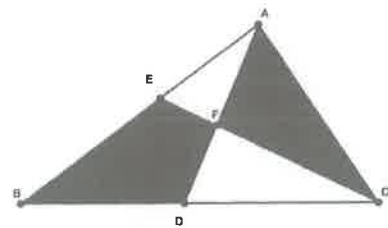


- (1) π (2) 2π (3) 3π (4) 4π (5) 5π

14. 如下圖, 在 $\triangle ABC$ 中, 點 D 在邊 BC 上, 使 $\overline{DC} = 2\overline{BD}$. 又在 $\triangle ABC$ 內取一點 F

使 $\overline{AF} = \overline{FD}$ (A, F, D 共線), 作 $\overline{CF}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E , 若 $\triangle ABC$ 之面積 = 20, 則在 $\triangle ABC$ 內且塗黑部

分之面積 = (圖形僅供參考, 不代表實際上之大小)



- (1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 14 (5) 15

二、填充題:每題 5 分, 共 30 分

A. k 為正整數, $\langle a_k \rangle$ 為一數列且滿足 $a_1 = \frac{1}{13}$, $6(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = (k+5)a_k$, 求

$$a_{11} = \underline{\textcircled{15} \textcircled{16} \textcircled{17}}$$

B. $2^4 + 2^7 + 3^n$ 為一完全平方數, 求 n 之最大值 = $\textcircled{18}$

C. 設 $b+c=156$, 試求 $x^2 + bx + c = 0$ 之所有正整數解之總和 = $\textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21}$

D. $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 49^\circ$, $\overline{BC} = 12$, 若以 $\overline{BC}$ 為直徑作圓分別交

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 於 D, E, 求 $\overline{DE} = \underline{\textcircled{22}}$

E. $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AC} + \overline{BC} = a$, M 為 $\overline{AB}$ 之中點, $\overline{MA} = \overline{MB} = 4$, 試求 a 之範圍?

$\textcircled{23} < a \leq \textcircled{24} \sqrt{\textcircled{25}}$

F. $f(n)$ 表示正整數 n 之最大正的奇數因數, 如 $f(3) = 3$, $f(10) = 5$, 求

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(40) = \underline{\textcircled{26} \textcircled{27} \textcircled{28}}$