

國立臺南第一高級中學 112 學年度學術性向資優鑑定

【數理類】複選第二階段《數學》實作評量試題

各位同學好，作答之前，請詳閱以下注意事項：

1. 手機請務必關機，手錶鬧鐘鬧鈴設定請取消，並將手機放置於前方地板上。
2. 桌上僅放置評量證及文具。
3. 遲到逾 20 分鐘者不得進入試場，考試開始 30 分鐘內不准出場。
4. 本次試題共 4 題「填充題」及 4 題「計算或證明題」，請直接作答於試題本上，其中「填充題」不須列出計算過程，「計算或證明題」須列出過程，請將答案填入各題指定的答案欄位中。
5. 每位考生提供 2 張 A3 計算紙，但作答於計算紙不予計分。
6. 考生不得將試題及計算紙攜出試場，違者該科不予計分。
7. 請用黑色或藍色墨水的筆作答，不得使用鉛筆。
8. 請務必在試題本上填入姓名及評量證號碼。
9. 作答時請注意翻頁方式。
10. 考試時間 09:30~10:50，共 80 分鐘。
11. 試題共 7 頁。

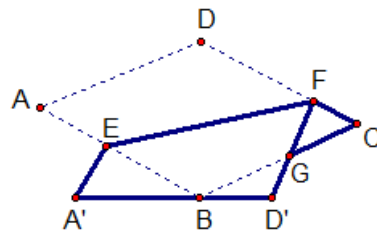
☆鈴響前請勿翻開試題本☆

評量證號碼：□□□□□
姓名：_____

第一大題、填充題（佔 32 分）

說明：1. 第 1 題至第 4 題，不須列出計算過程，請將答案直接填入本頁下方的答案欄中。
2. 每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣。

1. 如右圖，有一菱形紙片 $ABCD$ ，已知 $\angle A = 60^\circ$ ，將紙片沿著摺痕 $\overline{EF}$ 摺疊，使得 A 、 D 分別落在點 A' 、 D' 處，且 B 點落在 $\overline{A'D'}$ 上。若 $\overline{D'F} \perp \overline{CD}$ ，則 $\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 若三相異數 x 、 y 、 z 滿足 $x^2(y+z) = y^2(z+x) = 2023$ ，則 $z^2(x+y) - xyz$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 將八個數 -7 、 -5 、 -3 、 -2 、 2 、 4 、 6 、 13 任意排成一列，依其由左而右依序令為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 、 h 。
（例如： -2 、 6 、 -5 、 4 、 2 、 13 、 -7 、 -3 ，則 $a = -2$ 、 $b = 6$ 、 $c = -5$ 、 $d = 4$ 、 $e = 2$ 、 $f = 13$ 、 $g = -7$ 、 $h = -3$ 。）
試問：欲使 $(a+b+c+d)^2 + (e+f+g+h)^2$ 之值為最小，則最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 設 a 為實數，若 x 的一次聯立不等式 $\begin{cases} x < a+1 \\ 2x-2 > a \end{cases}$ 之解中的整數恰好為兩個，則滿足上述條件之 a 值所有可能的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

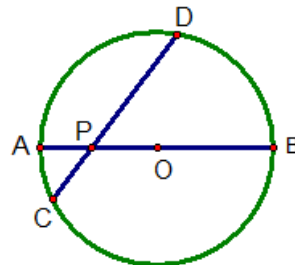
【填充題之答案欄】

1.	2.	3.	4.

第二大題、計算或證明題（佔 68 分）

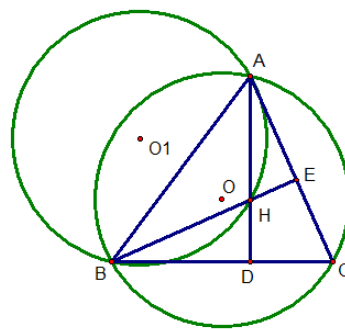
說明：第 5 題至第 8 題請列出過程，並將其寫入各題下方指定的答案欄中，沒有與答案相關的列式一律不予計分。

5. 如右圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑， P 為 $\overline{OA}$ 上的一點，
 $\overline{CD}$ 為過 P 點的另一弦，試證： $\overline{PB} - \overline{PA} > \overline{PD} - \overline{PC}$ 。
(10 分)



5.

6. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 的高 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 交於點 H ，
 若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABH$ 的外接圓分別為圓 O 與圓 O_1 ，
 （其中點 O 、點 O_1 分別為其圓心）
 試證：圓 O 與圓 O_1 的半徑相等。（10 分）



6.

7. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且滿足 $3a_5 = 8a_{12} > 0$ ；數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ ， n 為正整數。(例如： $b_1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ ， $b_2 = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ ， $b_3 = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ 。)

(1) 數列 $\langle b_n \rangle$ 中，若 $b_n > 0$ ，則 n 值為何？(12分)

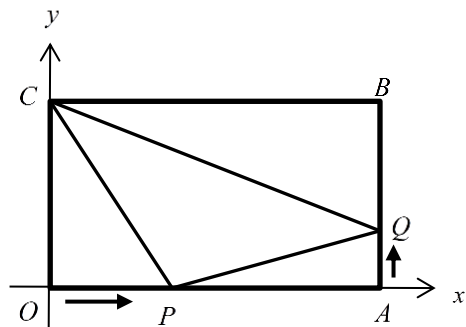
(2) 若 S_n 表示數列 $\langle b_n \rangle$ 的前 n 項總和，

例如： $S_1 = b_1$ ， $S_2 = b_1 + b_2$ ， $S_3 = b_1 + b_2 + b_3$ ， $\dots$ ， $S_k = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k}_{\text{共}k\text{項}}$ 。

考慮 S_1 、 S_2 、 S_3 、 $\dots$ 、 S_n 、 $\dots$ 之各項，試問：當 S_n 之值為最大時，其 n 值為何？請說明理由。(12分)

7.(1)

8. 如右圖，在直角坐標系中，矩形 $OABC$ 的兩邊分別在 x 軸、 y 軸上， $\overline{OA} = 10$ 公分， $\overline{OC} = 6$ 公分。現有兩動點 P 、 Q 分別從 O 、 A 同時出發，點 P 在 $\overline{OA}$ 上沿 $\overline{OA}$ 方向作等速運動，點 Q 在 $\overline{AB}$ 上沿 $\overline{AB}$ 方向作等速運動，已知點 P 的運動速度為每秒 1 公分。請回答下列問題：



- (1) 設點 Q 的運動速度為每秒 $\frac{1}{2}$ 公分，運動時間為 t 秒，當 $\triangle COP$ 、 $\triangle PAQ$ 兩者相似，求 Q 點坐標。（10 分）
- (2) 設點 Q 的運動速度為每秒 k 公分，試問是否存在 k 值使得 $\triangle COP$ 、 $\triangle PAQ$ 、 $\triangle CBQ$ 三者皆相似？若存在，請求出 k 值及此時的 Q 點坐標。若不存在，請說明理由。（14 分）

8.(1)

8.(2)