

一填充題 60%(每題 10 分,請將答案填入答案卷的指定欄位中)

1. 設 D 為 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的一點, 已知 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 15^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$, 試求 $\overline{AB}:\overline{AC} =$

2. $\triangle ABC$ 為一三角形, 已知 D, E 在 \overline{BC} 上 ($B-D-E-C$) 且 $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$, F 在 \overline{AB}

($A-F-B$) 且 $\overline{AF}:\overline{BF} = 2:5$, \overline{CF} 分別交 \overline{AD} , \overline{AE} 於 G, H 二點 試求 $\frac{\triangle AGH \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}} =$

3. $3^{2019} - 3^{108}$ 計算後末二位數字為=

4.有二個容器 A 與 B,A 中裝有 1 公升的水, B 是空的,第 1 次將 A 中水量的 $\frac{1}{2}$ 倒入 B 中,第 2 次將 B 中水量的 $\frac{1}{3}$ 倒入 A 中, 第 3 次將 A 中水量的 $\frac{1}{4}$ 倒入 B 中,……如此繼續操作,第 108 次操作後,則 B 中有_____ 公升的水

5.若 m,n 皆為正整數且滿足 $n = \sqrt{m-108} + \sqrt{m+21}$,試求 $m+n=$ ____(二解)

6. 小明發明了一個數線跳棋遊戲,首先將棋子放在原點, 然後依序寫出 a_1, a_2, \dots, a_{10} 等 10 個相異的整數,接著計算 $a_2 - a_1$ 的值,並依照計算出來的值移動棋子(例如“+3”就往右移動 3 單位,“-2”就往左移動 2 單位).接下來計算 $a_3 - a_2$ 的值並移動棋子,依序計算並移動 $a_{n+1} - a_n$ 的值,直到移動完 $a_{10} - a_9$ 的值為止.

已知小明隨意將 1~10 的 10 個整數填入 a_1, a_2, \dots, a_{10} , 整個遊戲移動過程中只有轉向一次,最後停在數線上標示為“2”的位置,請問小明將 1~10 的 10 個整數填入 a_1, a_2, \dots, a_{10} 的方法有____種。(例如： a_1, a_2, \dots, a_{10} 依序為 1,2,6,8,10,9,7,5,4,3 其移動過程為 +1, +4, +2, +2, -1, -2, -2, -1, -1, 只轉向一次,最後停在“2”的位置)

二.計算與證明題 40%(每題 10 分,沒有與答案相關之算式一律不予計分)

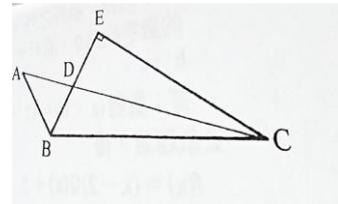
1. (1) a, b 皆為正實數,試證明 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 且當 $a=b$ 時, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ (5%)

(2) a, b, c 皆為正實數,且
$$\begin{cases} a + \frac{25}{c} = \frac{9}{2} \\ 9b + \frac{4}{a} = 8 \\ \frac{c}{4} + \frac{4}{b} = \frac{17}{2} \end{cases}$$
, 試求序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ (5%)

2. 已知 c 為實數, $x^2 + c = |x^2 - 6x|$ 恰有 3 個相異的實根, 試求 c 之範圍?

3. 如右下圖, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, \overline{BD} 平分 $\angle ABC$, 交 \overline{AC} 於 D , 過 C 做

\overline{CE} 垂直 \overline{BD} 之延長線於 E . 試證明 $\overline{BD} = \overline{DE}$



4. 108, 109, 110, \dots , 143, 144, 將這些數連寫成自然數 N , 即 $N = 108109110\dots 143144$, 試證 N 為 666 之倍數.