姓名：___________

准考證號碼：_______

國立臺南第一高級中學**107**學年度學術性向資優鑑定

【數理類】複選第二階段數學實作評量試題

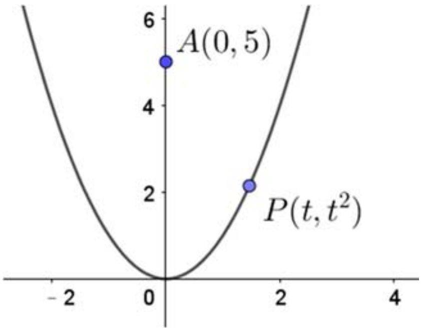
※作答注意事項※

1. 本階段測驗時間：民國107年7月27日上午**09**：**30**～**10**：**50**（共**80**分鐘）。
2. 考生在考試時間內，桌上僅放置准考證及文具。
3. 手機請務必關機，並放置於教室前方地板上；
   手錶（或鬧鐘）之鬧鈴設定請取消。
4. 考生遲到**15**分鐘以上不得進考場應試；考試開始**30**分鐘內不得交卷離場。
5. 考生不得將試題或答案卡（卷）攜出試場，違者該科不予計分。
6. 請在試題本及答案卷上方填入姓名及准考證號碼。
7. 答案卷有兩面，請記得翻頁依題號順序作答。
8. 本次試題共10題，分成【填充題】與【計算證明題】兩大題，其中填充題（共六題）視答題性質有可能給部份分數（半對）；而計算證明題（共四題）則是可以視列式步驟間的合理性部份給分，但若只有答案卻無列式過程則不予計分。

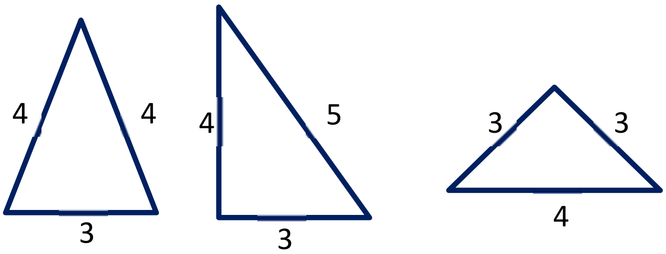
☆鈴響前請勿翻開試題本☆

第一大題：填充題（60%，每題 10 分，請將答案填入答案卷的指定欄位中）

1. 如圖，$P(t,t^2)$ 為拋物線 $y=x^2$ 上一動點，已知 $A(0,5)$，則 $\overline{PA}$ 的最短距離為＝____。



2. 一個四面體（三角錐）的其中三面及其邊長標示如下圖。



則第四面的三邊長可能有哪些情形？

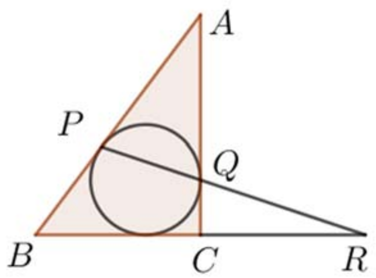
【若邊長為 3,2,4，則從小到大用數序表示為 $(2,3,4)$】

3. 由 $-3,0,12$ 三數組成數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{15}$，已知 $a_1+a_2+\ldots+a_{15}=60$ 且

$(a_1+4)(a_2+4)\ldots(a_{15}+4)=2^{34}$，則 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{15}^2$ ＝____。

4. 已知ΔABC中$\angle C=90°$，$\overline{BC}=5,\overline{AC}=12$，內切圓與$\overline{AB},\overline{AC}$切於$P,Q$兩點。

若直線PQ與直線BC交於R，則$\overline{CR}$＝____。

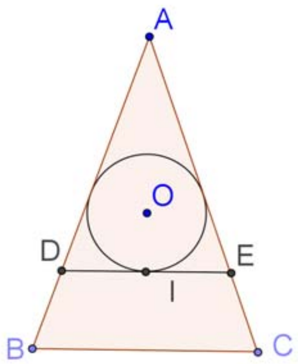


5. (1) 4^{110}除以 7 的餘數為____。（4 分）

(2) 110^4除以 7 的餘數為____。（3 分）

(3) 有多少個不超過 210 的正整數x，滿足4^x-x^4是 7 的倍數？（3 分）

6. 如下圖，在△ABC 中$\overline{AB}=\overline{AC}$且$\overline{BC}=4$，已知 O、I 分別為△ABC 的外心與內心，設$\overline{DE}$過 I 且與$\overline{BC}$平行，若 O 點恰為△ADE 的內心，則$\overline{AB}$＝____。

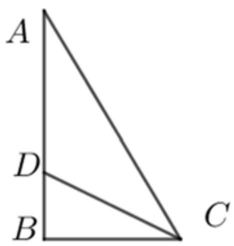


第二大題：計算與證明題（40%，每題 10 分，沒有與答案相關的列式一律不予計分）

7. 兩正整數 x, y 滿足 $200 \geq x > y$ ，且滿足 $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 4$ ，則數對 (x, y) 共有幾組解？

8. 已知 ΔABC 中， $\overline{BC} = 4, \angle B = 90°$ ，若 $\angle C$ 平分線與 $\overline{AB}$ 交於 D 點，且 $\overline{BD} = 3$ ，

試求：(1) ΔACD 周長？（6 分） (2) ΔACD 內切圓半徑？（4 分）



9. 已知 m 為正整數， n 為 m 的正因數中小於 m 的最大正因數，若 m 比 n 的 9 倍少 100，則 m ＝____。

10. 【參考公式： $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 】

已知 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 n 個連續正整數， $n \geq 2$

(1) 試證：n 是偶數時， $a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2$ 的算術平均數不是正整數。（7 分）

(2) 已知 $a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2$ 的算術平均數也是完全平方數，試求 n 的最小值？（3 分）