

數學科實作評量試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下作答說明：

測驗說明：

1. 本試卷共二大題，包含填充題與計算證明題。
2. 請將所有答案填入答案卷，計算證明題須將計算證明(或思考)過程寫在答案卷上，僅寫出正確答案者，將酌量扣分。
3. 測驗時間從 08：10 到 09:40 共 90 分鐘。
4. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。

國立臺南一中九十九學年度科學班第一階段甄選複試數學科實作試題

※ 請將所有答案填入答案卷，否則不予計分

一. 填充題 (每題 6 分, 共 48 分)

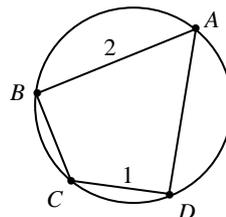
1. 設 k 為實數, 且 α, β, γ 為方程式 $x^3 - 3x + k = 0$ 的三實根, 若 α 的最大值 = M 與最小值 = m , 求數對 $(M, m) =$ _____

2. 有一等腰梯形的腰長為 c , 已知兩平行之上底邊及下底邊長分為 4 和 6, 且四個邊中點所形成的四邊形之四個內角相等, 試求此等腰梯形腰長 $c =$ _____

3. 求 $x^2 - 4xy + 7y^2 - 2x + 16y - 84 = 0$ 的正整數解 $(x, y) =$ _____

4. 如圖, 在圓內接四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ, \angle B = 90^\circ$,

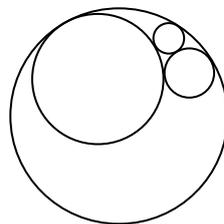
且 $\overline{AB} = 2, \overline{CD} = 1$, 則 $\overline{BC} =$ _____



5. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 角平分線 $\overline{AD}, \overline{BE}$ 相交於 I , 若 $\triangle ABI$ 面積 = 12, 求四邊形 $ABDE$ 面積為 _____

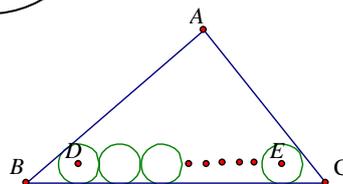
6. 已知實數 a, b, c 滿足 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 則 $a^5 + b^5 + c^5 = p + q \cdot abc$, 其中 p, q 均為整數, 求數對 $(p, q) =$ _____

7. 三個兩兩相外切的圓, 均內切於一個大圓 (如圖), 此三個圓半徑分別為 6、9、30, 則最外面的大圓半徑為 _____



8. 如圖, 在 $\triangle ABC$ 中, 有 11 個等圓兩兩外切且都和 \overline{BC} 相切,

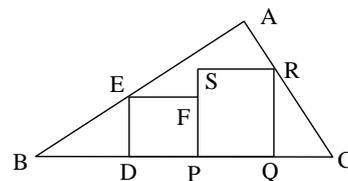
圓 D 和 \overline{AB} 相切, 圓 E 和 \overline{AC} 相切, 若 $\angle A = 90^\circ, \overline{AB} = 4, \overline{AC} = 3$, 求這些等圓的半徑為 _____



二. 計算證明題 (共 4 題, 合計 52 分)

1. 如右圖, $\triangle ABC$ 為直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ, \overline{AB} = 8, \overline{AC} = 6$

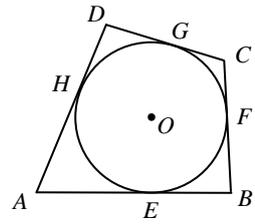
D, P, Q 在 \overline{BC} 上, E, R 分別在 \overline{AB} 與 \overline{AC} 上, 已知四邊形 $PDEF$ 與 $PQRS$ 均為正方形, 試問:



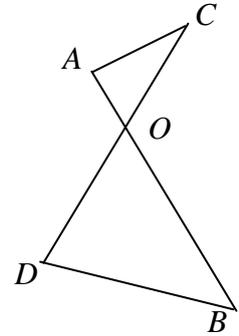
(1) 若 $\overline{PQ} = x$, 試以 x 表示正方形 $PDEF$ 與 $PQRS$ 之面積和 = ? (7 分)

(2) 試求正方形 $PDEF$ 與 $PQRS$ 之面積和最小值為 ? (7 分)

2. 外切於圓 O 的四邊形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\overline{CD} = c$ ，而切點有 E 、 F 、 G 、 H 四點（如圖），而此四邊形有一個外接圓，求證： $\overline{AE} = \frac{a(a+c-b)}{b+d}$ (12分)



3. 如右圖，設 $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$ ， \overline{AB} 與 \overline{CD} 相交於 O 點， $\angle AOC = 60^\circ$ ，試證： $\overline{AC} + \overline{BD} \geq 1$ (12分)



4. $\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ 均為整數，若 G ， I 分別為 $\triangle ABC$ 的重心及內心且 $\angle GIC = 90^\circ$
- (1) 求證： $a+b+c = \frac{6ab}{a+b}$ (7分)
 - (2) 設 a ， b 不互質，求 $\triangle ABC$ 周長的最小值為？ (7分)