

數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 測驗時間為 10：40～12：00，共 80 分鐘。
2. 本試卷共兩大題（單選題 14 題、計算證明題 3 題），共計 100 分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色 2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液(帶)。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負，不得提出異議。
4. 計算證明題請寫於答案卷上，寫於試卷不予計分。
5. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
6. 試卷及答案卷如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。
7. 測驗結束後，請將試題本放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

一、單選題：每題 5 分，共 70 分。

1. 已知 $a+b=\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}-1$ ， $a-b=\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}-1$ ，求 a^2+b^2 之值為何？

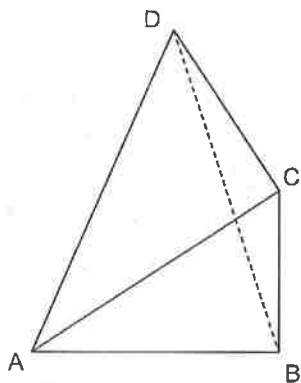
- (A) $\sqrt{7}-1$ (B) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{\sqrt{7}-1}$ (D) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}$ (E) $\sqrt{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}$

2. 已知一半徑為 6 的圓，將圓心設定在坐標平面上的原點 O ，今被兩直線 $x=4$ 及 $y=3$ 分割成 4 個區域，若其面積分別為 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 ，且 $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$ ，則 $R_1 - R_2 - R_3 + R_4$ 之值為何？ (A) 48 (B) $36\sqrt{2}$ (C) 43 (D) $28\sqrt{3}$ (E) 52

3. 臺南一中與臺中一中於去年舉辦一中盃籃球賽，目前僅留有以下資料：臺南一中總投球數為 110 球，其中只有投兩分球及三分球（沒有罰球），且投兩分球時，進球數與不進球數的比為 1：2，而投三分球時，進球數與不進球數的比為 1：6。依上述數據，試問臺南一中所有可能得分中，最低分為多少？ (A) 35 (B) 45 (C) 50 (D) 55 (E) 60

4. 多項式 $f(x)$ 次數大於 2 次，已知 $f(x)$ 、 $xf(x)$ 分別除以 $2x^2 + bx + c$ 之餘式均為 $4x + 1$ ，則 $b + c$ 之值為何？ (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4 (E) -5

5. 如圖，設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 為相似三角形，且 $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$ 。若 $\triangle ABC$ 面積為 92，求 $\triangle ABD$ 面積為何？ (A) 184 (B) $\frac{828}{5}$ (C) $92\sqrt{3}$ (D) $92\sqrt{2}$ (E) 條件不足，無法確定



6. 設 A_n 和 B_n 分別為等差數列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 n 項和，對任意正整數 n 均滿足 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{n-9}{n+1}$ ，求 $\frac{a_{10}}{2b_{20}} + \frac{a_{30}}{b_{16} + b_{24}}$ 之值為何？ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{11}{21}$ (E) $\frac{31}{41}$

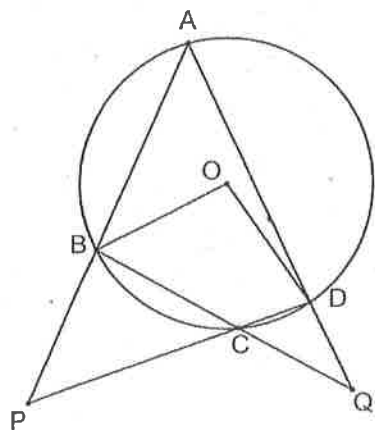
7. 已知方程式 $||x-a|-b|-c=0$ 有 4 個負實數解，則常數序組 (a,b,c) 的正負號為何？

- (A) $(+, +, +)$ (B) $(+, +, -)$ (C) $(+, -, +)$ (D) $(-, +, +)$ (E) $(-, +, -)$

8. 滿足聯立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 12 \leq -16x + 2y - z \\ x^2 + y^2 + 18 \leq 4x + 10y + z \end{cases}$ 有實數解 (x, y, z) ，則 $z = ?$

- (A) 0 (B) 11 (C) 17 (D) 23 (E) 29

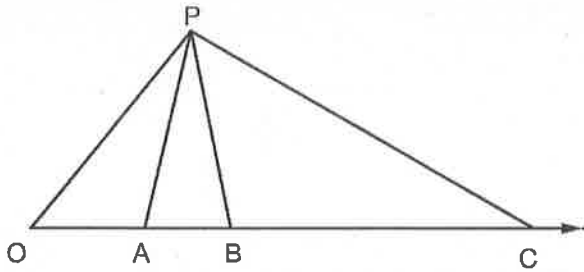
9. 如下圖，四邊形 $ABCD$ 的外接圓圓心為 O ，兩對邊延長線分別交於點 P 、 Q ，若 $\angle P = 2\angle Q$ 且 $\angle BOD = 108^\circ$ ，求 $\angle Q = ?$ (A) 16° (B) 18° (C) 20° (D) 22° (E) 24°



10. 設正數 A 滿足 $(A^2 + 4A + 1)(4A^2 + 16A + 1) = 10$ ，求 $A - \frac{1}{A}$ 之值為何？

- (A) -1 (B) -4 (C) -7 (D) -13 (E) -16

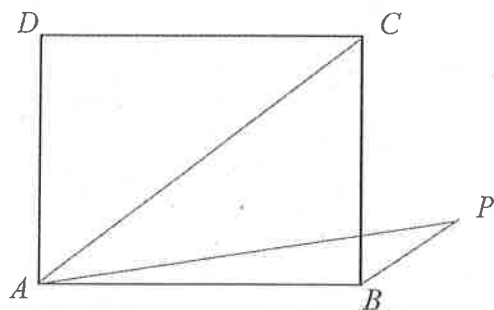
11. 如下圖，數線上四點 $O(0)$ ， $A(20)$ ， B ， $C(90)$ ，已知 $\overline{PA}$ 平分 $\angle OPB$ ， $\overline{PA}$ 垂直 $\overline{PC}$ ，求最接近 B 坐標的整數為何？ (A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35



12. 將分數 $\frac{10^{2024}}{10^{1012} + 2}$ 寫成帶有小數的數字「pqr...abc.def...」，則其整數部份的最後三位數"abc"為何？ (A) 988 (B) 992 (C) 994 (D) 996 (E) 998

13. 如下圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形，過 B 點作一直線 $\overline{BP}$ 平行直線 $\overline{AC}$ 且使 $\overline{AC} = \overline{AP}$ ，已知 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ，試求 $\overline{BP} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{663}-14}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{481}-16}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{713}-12}{6}$ (D) $\frac{\sqrt{721}-10}{9}$ (E) $\frac{\sqrt{831}-7}{10}$



14. 已知一遊戲有 9 種類別：甲、乙、丙、丁、戊、A、B、C、D，其中每一種類別各有 7 款不同角色，且每款角色最多只能收集一個（所以最多收集 63 個角色）。當收集到「甲與 A 類各 1 個角色」或「乙與 B 類各 1 個角色」或「丙與 C 類各 1 個角色」或「丁與 D 類各 1 個角色」或「戊類有兩個角色」均可以產生晉級，例如：收集到甲類×1、A 類×2、戊類×1 時可以晉級；又如：收集到甲類×1、B 類×2、戊類×2 時也可以晉級；但收集到 B 類×1、丙類×3、丁類×2、戊類×1 時，不可以晉級。依以上規則，請問至少要收集到幾個角色才能保證一定晉級？ (A) 10 (B) 16 (C) 26 (D) 30 (E) 33

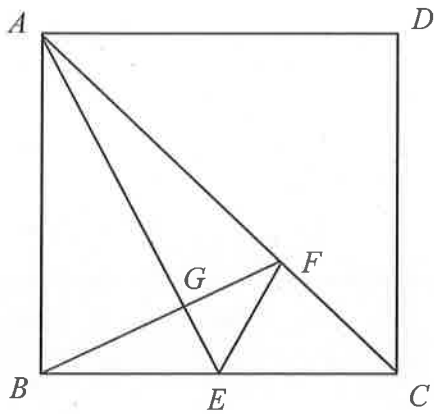
二、計算證明題：每題 10 分，共 30 分。

(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. 如下圖，設正方形 $ABCD$ ， $\overline{AC}$ 為對角線， E 為 $\overline{BC}$ 的中點， F 在 $\overline{AC}$ 上滿足

$\angle AEB = \angle FEC$ ， $\overline{AE}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 G 。

(1) 連 $\overline{DE}$ ，證明： $\overline{DE}$ 通過 F 點。(5 分) (2) 承(1)，證明： $\overline{AE} \perp \overline{BF}$ 。(5 分)



2. (1) 設 n 為正整數，試求 n^2 除以 3 的餘數為何？(4 分)

(2) 設直角三角形三邊長 a 、 b 、 c 皆為正整數，且 c 為斜邊，試證明： a 、 b 、 c 三數中必有 3 的倍數。(6 分)

3. 形如 $\frac{a}{b}$ (其中 $8 \leq b \leq 99$) 的最簡分數中，請問哪一個滿足 $\left| \frac{3}{7} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|3b-7a|}{7b}$ 最小？試說明你的理由。(10分)