

數學科 試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

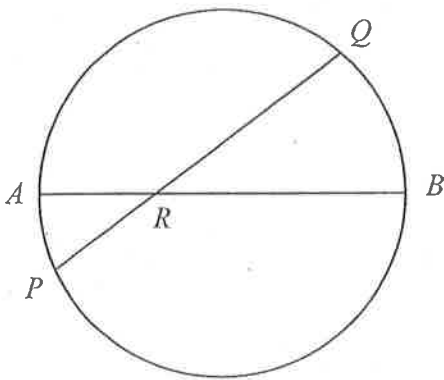
測驗說明：

1. 測驗時間為 15：10～16：40，共 90 分鐘。
2. 本試卷共兩大題（填充題 4 題、計算證明題 5 題），合計 100 分。
3. 直接作答於此試卷中，填充題請將答案填入答案欄內，計算證明題請將完整解題過程和答案填入作答欄位內，否則不予計分。
4. 作答時不可使用計算機。
5. 試卷如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員。
6. 測驗結束後，請將試卷放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

一、 填充題：每題 7 分，共 28 分。

1. 班上有 42 位同學進行了以下遊戲：黑板上寫有正整數 1 到 86。第一位同學先擦掉其中 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減 4 後所得的整數。第二位同學從剩餘的數中再擦掉 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減 8 後所得的整數。依此類推，第 k 個同學從剩餘的數中擦掉 3 個數，並在黑板上寫上這三個數的和減 $4k$ 後所得的整數。如此進行一直到所有同學都參與。如果最後留在黑板上的數皆為正整數，且 53 是留下的其中一個數，試求其它留下的數為_____。

2. 如下圖，一圓以 $\overline{AB}$ 為直徑，圓上有一弦 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 R 點，已知 $\overline{AR} = 3$ ， $\overline{BR} = 7$ ，且 $\angle BRQ = 30^\circ$ ，則 $\overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$ 之值為_____。



3. 已知 $\begin{cases} ab + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 7 \\ bc + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{1}{bc} = 6 \\ ca + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{ca} = 9 \end{cases}$, 則 $abc + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{1}{abc}$ 之值為_____。

4. 已知一數列： $a_1 = (3 + \sqrt{7}) + (3 - \sqrt{7})$, $a_2 = (3 + \sqrt{7})^2 + (3 - \sqrt{7})^2$, $a_3 = (3 + \sqrt{7})^3 + (3 - \sqrt{7})^3, \dots$,
 $a_n = (3 + \sqrt{7})^n + (3 - \sqrt{7})^n, \dots$, 若 $a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_n$, 求實數數對 $(\alpha, \beta) =$ _____。

【填充題答案欄】（請將答案填入答案欄內，否則不予計分）

1.	2.	3.	4.

二、計算證明題：共 72 分。

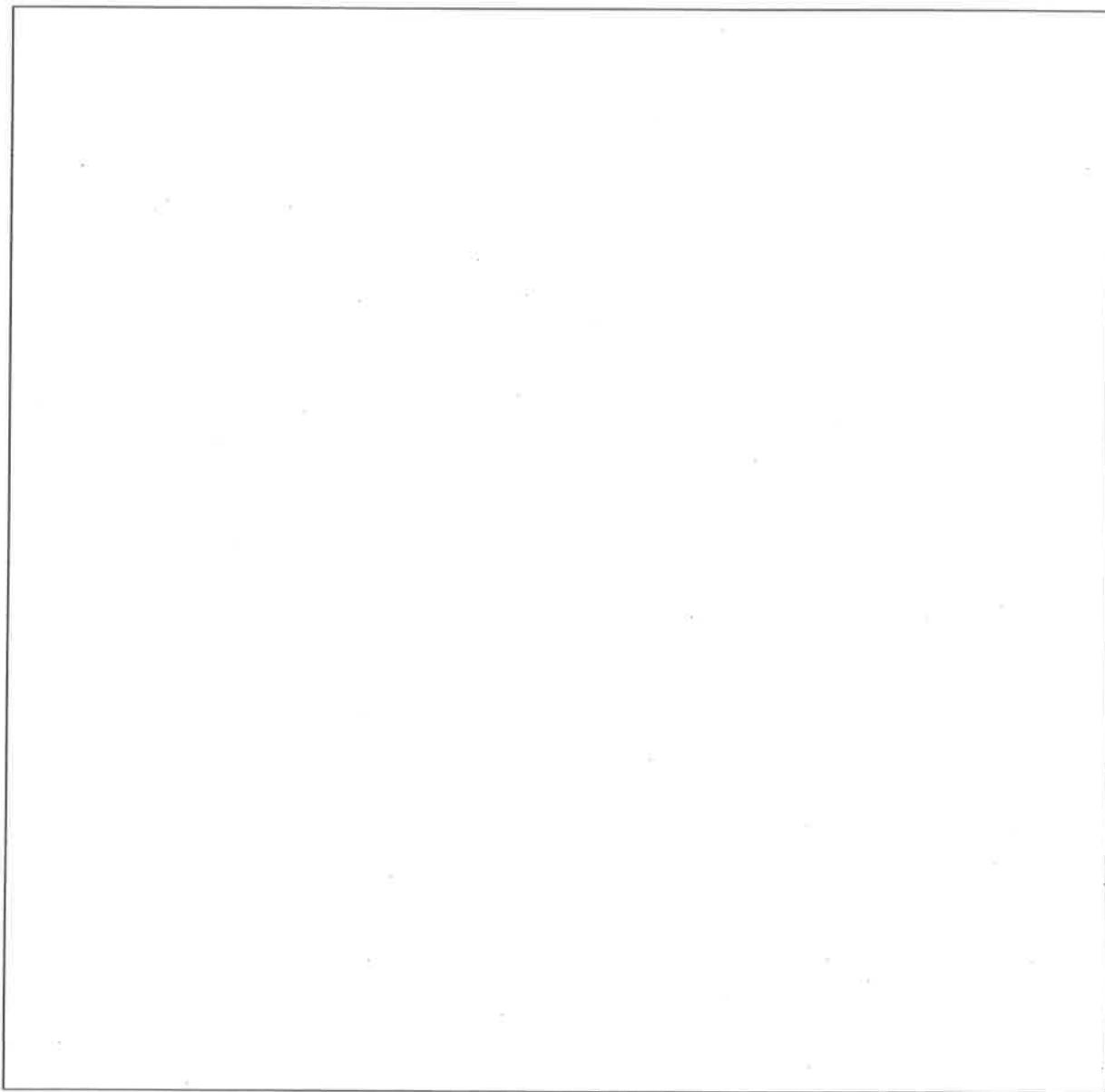
(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. $[x]$ 表示小於或等於實數 x 的最大整數，例： $[3]=3$ ， $[5\frac{1}{3}]=5$ ， $[-5.2]=-6$ ，則

(1) 已知 $[x]=3$ ，求 x 範圍為何？(3 分)

(2) 已知 $[x+\frac{1}{3}]+[x-\frac{1}{3}]=5$ ，求 x 範圍為何？(5 分)

(3) 設 x, y 滿足
$$\begin{cases} [x]+[y]=7 \\ 2x+[y]=11 \\ [x]+3y=17 \end{cases}$$
，求數對 $(x, y)=?$ (6 分)

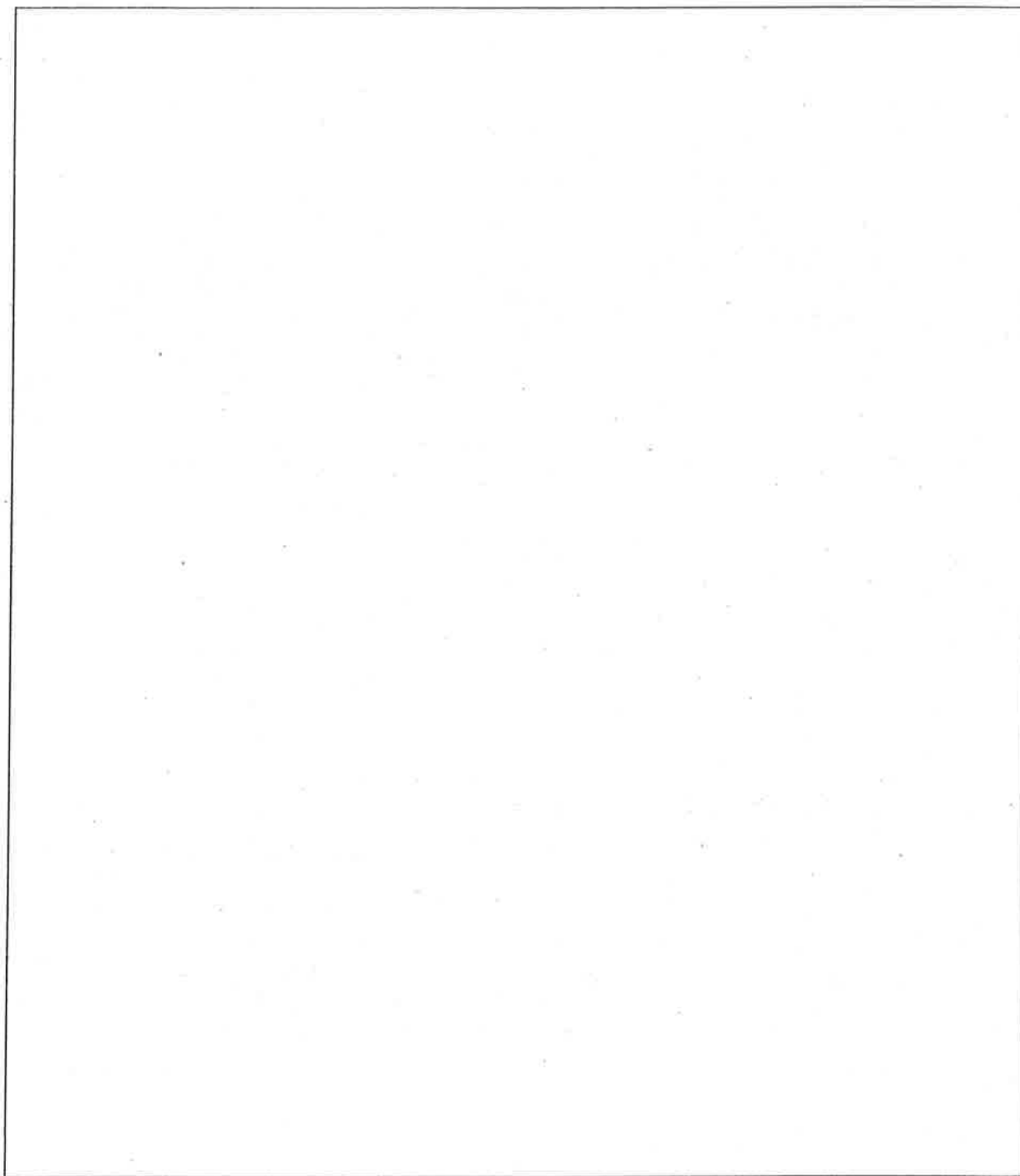


2. (1) 因式分解： $x^4 + 64$ (4 分)

(2) 化簡 $\frac{5^4 + 64}{1^4 + 64} \times \frac{13^4 + 64}{9^4 + 64} \times \frac{21^4 + 64}{17^4 + 64} \times \frac{29^4 + 64}{25^4 + 64} \times \frac{37^4 + 64}{33^4 + 64} \times \frac{45^4 + 64}{41^4 + 64}$ 為最簡分數 (5 分)

(3) 設 p 為正整數，且 $\frac{5^4 + 64}{1^4 + 64} \times \frac{13^4 + 64}{9^4 + 64} \times \frac{21^4 + 64}{17^4 + 64} \times \dots \times \frac{(8p-3)^4 + 64}{(8p-7)^4 + 64}$ 也是正整數，

則將所有滿足條件的 p 值由小而大排成一數列 $\langle p_n \rangle$ ，試求 $p_5 = ?$ (6 分)



3. 以 A_n 表示一群正整數 $1, 2, 3, \dots, n$ 。設 a, b 為正整數，以 $aA_n + b$ 表示將 A_n 中每數乘以 a 再加 b 後得到的正整數群，即 $a+b, 2a+b, 3a+b, \dots, na+b$ 。以 $f_m(aA_n + b)$ 表示將 $aA_n + b$ 中每數除以正整數 m 得到不同餘數的個數。例： A_3 表示 $1, 2, 3$ ，將 $2A_3 + 5$ 中各數 $7, 9, 11$ 除以 4 ，只得到 2 個不同餘數（ 1 與 3 ），所以 $f_4(2A_3 + 5) = 2$ 。

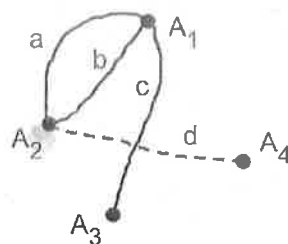
(1) 求 $f_6(3A_6) = ?$ ， $f_6(5A_6 + 1) = ?$ （4 分）

(2) 當 n, a 滿足什麼條件時，可以得到 $f_n(aA_n + b) = n$ ？請寫出最完整的條件，並證明此時

$$f_n(aA_n + b) = n \text{。 (7 分)}$$

(3) 求 $f_{2024}(690A_{2024} + 462) = ?$ （5 分）

4. 本大題先決定幾個點，再決定哪兩相異點是否連線，相同兩點可以連接兩條線以上。如右圖，有 4 個點 (A_1, A_2, A_3, A_4) ，產生 4 條連線 (a, b, c, d) ，其中 a, b 皆連接 A_1 與 A_2 ， c 連接 A_1 與 A_3 ， d 連接 A_2 與 A_4 ， c 與 d 兩線相交處不視為一個點，以 $L(A_i)$ 表示點 A_i 的連線數，即 $L(A_1)=3$ ， $L(A_2)=3$ ， $L(A_3)=1$ ， $L(A_4)=1$ 。



(1) 試完成以下 4 個點 (A_1, A_2, A_3, A_4) 之連線圖，滿足 $L(A_i)=i$ ，其中 $i=1, 2, 3, 4$ 。(4 分)

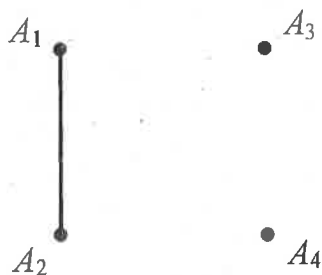
(2) 是否能夠構造出 36 個點 $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_{36})$ ，滿足 $L(A_i)=i$ ，其中 $i=1, 2, 3, \dots, 36$ 。

(若能，請敘述構造方法；若不能，請證明之)(5 分)

(3) 是否能夠構造出 49 個點 $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_{49})$ ，滿足 $L(A_i)=i$ ，其中 $i=1, 2, 3, \dots, 49$ 。

(若能，請敘述構造方法；若不能，請證明之)(6 分)

(1)



5. (1)如下圖，已知銳角 $\angle RST$ 內有一圓，請利用尺規作圖找出該圓的圓心，並標示為 O 。

(保留作圖痕跡，不需寫出作法、證明)(5分)

(2)承(1)，請連 $\overline{OS}$ ，標示交圓於 A ，並利用尺規作一周長最短的 $\triangle ABC$ ，其中 B 、 C 兩點各落在 $\angle RST$ 的兩邊。(保留作圖痕跡，並簡述作法，不需證明)(7分)

