

數學科 試卷

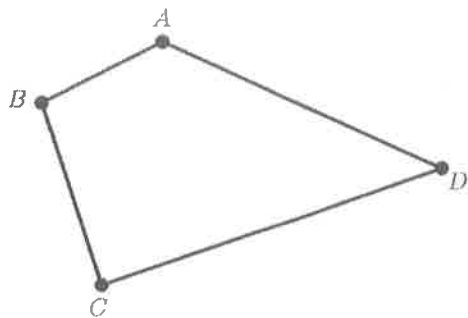
請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

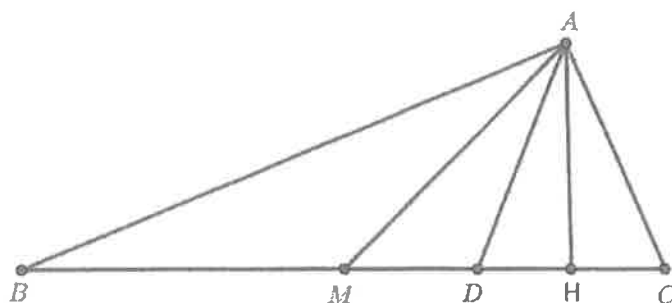
1. 本試卷共 5 大題，合計 100 分。
2. 測驗時間為 15:10～16:40，共 90 分鐘。
3. 計算證明題請寫於答案本(卷)上，寫於試卷不予計分。
4. 作答時不可使用計算機。
5. 試卷及答案本(卷)如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試人員。
6. 測驗結束後，請將試卷和答案本放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

1. 如下圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}$ 為最短邊， $\overline{CD}$ 為最長邊，試證： $\angle A > \angle C$ 。(15分)



2. 如下圖， $\triangle ABC$ 中， M 、 D 、 H 為 $\overline{BC}$ 上三點，其中 $\overline{BM} = \overline{CM}$ ， $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ， $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 。若 $\angle BAM = \angle MAD = \angle DAH = \angle HAC$ ，且 $\overline{CH} = 2$ ，試回答下列各小題。

- (1) 令 $\overline{MD} = x$ ，請用 x 表示 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 。(5分) (2) 試求 $\overline{BC} = ?$ (10分)



3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足以下兩個條件：

(i) 若 n 為奇數，則 $a_n = n^2 + 1$ 。

(ii) 若 n 為偶數，則 $a_n = n^2$ 。

令正整數 b_n 滿足 2^{b_n} 整除 a_n ，但 2^{b_n+1} 不能整除 a_n 。例如 $n=1$ 時， $a_1=2$ ， $b_1=1$ ；

$n=2$ 時， $a_2=4$ ， $b_2=2$ 。試回答下列各小題。

(1) 請寫出 b_4 、 b_6 、 b_8 之值。(6分)

(2) 試證明：若 n 為奇數，則 $b_n=1$ 。(10分)

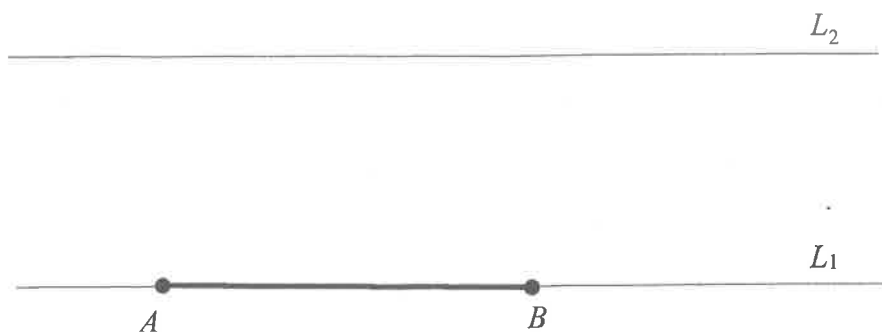
(3) 試求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{111}$ 之值。(10分)

4. 如下圖，直線 L_1 平行直線 L_2 ，直線 L_1 上有 A 、 B 兩點。

(1) 請利用尺規作圖在直線 L_2 作出 C 、 D 兩點滿足 $\overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ 且 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 。請於答案

卷作圖區中作圖，必須保留作圖痕跡，並寫出作法。(10 分)

(2) 承上，請證明你（妳）作出的 C 、 D 兩點滿足 $\overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ 且 $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 。(10 分)



5. 請閱讀下面說明，並回答問題(1)~(3)。

將寫有 1、2、3 的三張字卡由左而右排成一列，可以排出如下六種情形：

1 2 3、1 3 2、2 1 3、2 3 1、3 1 2、3 2 1

除了 1 2 3 是由小至大排列，其它五種排列都出現數字大的字卡排在數字小的字卡前面，我們稱這種情況為「逆序」。我們還可以進一步計算每一種排列情形的逆序數目。

例如：

(i) 1 3 2 中，逆序的情況只有 3 排在 2 之前，所以 1 3 2 的逆序數為 1。

(ii) 3 1 2 中，逆序的情況有 3 排在 1 之前、3 排在 2 之前，所以 3 1 2 的逆序數為 2。

(iii) 1 2 3 中，沒有任何逆序的情況，所以 1 2 3 的逆序數為 0。

根據上述的說明，請回答問題(1)。

問題(1) 若將 1、2、3、4 四張字卡排成 3 4 1 2，其逆序數為何？（4 分）

我們將 1、2、3 三張字卡排成一列的六種情形，依其逆序數，重新分類如下：

逆序數	0	1	2	3
排列情形	1 2 3	2 1 3、1 3 2	2 3 1、3 1 2	3 2 1

並用 $f(n, m)$ 表示「將寫有 1、2、3、……、 n 的 n 張字卡排成一列，其中逆序數為 m 的排列方法數」。例如 $f(3, 1) = 2$ ，也就是將 1、2、3 三張字卡排成一列，逆序數為 1 的排列方式有兩種，分別是 2 1 3 和 1 3 2。同理可知， $f(3, 0) = 1$ ， $f(3, 2) = 2$ ， $f(3, 3) = 1$ 。請回答問題(2)。

問題(2) 將寫有 1、2、3、……、9 的九張字卡由左而右排成一列，其中字卡 9 一定要排在倒數第二個位置（即右邊數來第二個位置），此時逆序數為 6 的排列方式共有 A 種。若 A 恰好等於 $f(8, k)$ ，請寫出常數 k 之值，並說明你（妳）的理由。（10 分）

若將 $f(1,0)$ 之值放在第一層， $f(2,0)$ 、 $f(2,1)$ 之值由左而右放在第二層， $f(3,0)$ 、 $f(3,1)$ 、 $f(3,2)$ 、 $f(3,3)$ 之值由左而右放在第三層， $f(4,0)$ 、 $f(4,1)$ 、 $f(4,2)$ 、 $f(4,3)$ 、 $f(4,4)$ 、 $f(4,5)$ 、 $f(4,6)$ 之值由左而右放在第四層，……，以此類推，可得下圖：

1											
1	1										
1	2	2	1								
1	3	5	6	5	3	1					
1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	
1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	
1	6	20	49	98	169	259	359	455	531	573	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

觀察上圖，可以發現一個有趣的規律：

$$f(3,0)+f(3,1)+f(3,2)=1+2+2=5=f(4,2)$$

$$f(3,0)+f(3,1)+f(3,2)+f(3,3)=1+2+2+1=6=f(4,3)$$

$$f(4,0)+f(4,1)+f(4,2)+f(4,3)=1+3+5+6=15=f(5,3)$$

.....

請回答問題(3)。

問題(3) 試說明對任意正整數 n ，當 $0 \leq k \leq n$ 時，

$$f(n,0)+f(n,1)+f(n,2)+\cdots+f(n,k)=f(n+1,k)。$$

(提醒：問題(3)的目的在於說明規律為何會成立，不能用這規律作為說明)(10分)