

### 數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

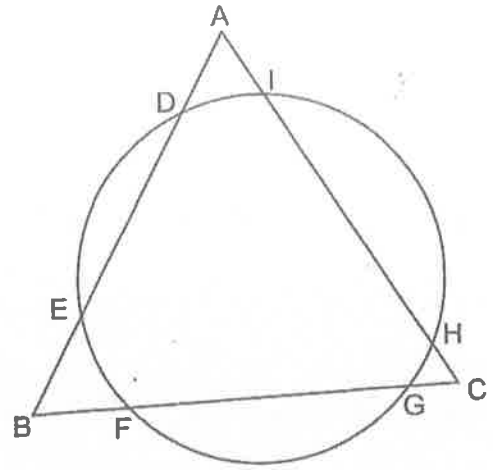
測驗說明：

1. 測驗時間 10:40~12:00，共 80 分鐘。
2. 本試卷共三大題(選擇題 10 題、填充題 5 題、計算證明題 3 題)，共計 100 分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色 2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液(帶)。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負，不得提出異議。
4. 填充題和計算證明題請依說明書寫於答案本(卷)上，寫於試卷不予計分。
5. 可利用試卷中空白部分計算。
6. 本科目不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
7. 試卷及答案本(卷)如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。

一、單選題：(10題，共50分)

1. 方程式  $xyz = 2021$ ，求整數解數對  $(x, y, z)$  共有多少組？(其中  $x, y, z$  未必是不同的數，且數對位置不同則視為不同的解) (A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 24 (E) 36
2. 連續 110 個正整數  $a_1, a_2, \dots, a_{110}$ ，若其總和為  $n^2$ ，其中  $n$  為正整數，則  $n$  的最小值為何？  
(A) 55 (B) 110 (C) 165 (D) 220 (E) 330。
3. 設  $m, n$  為整數，且多項式  $3x^3 + mx^2 - 24x + 12$  被  $x^2 - 5x + n$  所整除，試求  $m+n$  之值為何？  
(A) -8 (B) -7 (C) -6 (D) -5 (E) -4
4. 當  $x \neq 0$  時，多項式  $f(x)$  滿足  $4f(x) - x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 30$ ，則  $f(2021)$  的值為何？  
(A) 1070 (B) 2020 (C) 3060 (D) 4050 (E) 5030。
5. 已知  $\triangle ABC$  邊長為公差 2 的整數，且最大角為最小角的 2 倍，求此三角形的邊長？  
(A) 18 (B) 28 (C) 30 (D) 36 (E) 40
6. 連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為  $a, b$ 。試問滿足 3、 $a, b$  恰為等腰三角形 (包含正三角形) 的三邊長之機率為何？ (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{13}{36}$  (C)  $\frac{7}{18}$  (D)  $\frac{5}{12}$  (E)  $\frac{4}{9}$
7. 設  $k$  為正整數，若已知  $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ ，試求  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}}$  的整數部份為何？ (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

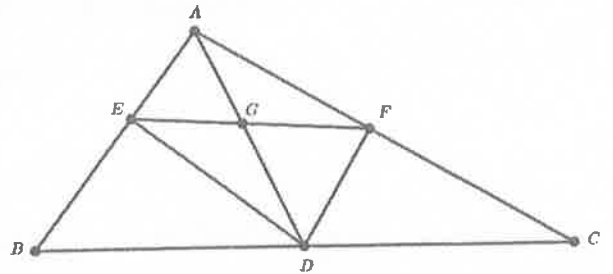
8. 如圖，一個圓交一個正 $\triangle ABC$ 於六個點，  
 設 $\overline{AI}=2$ ， $\overline{IH}=13$ ， $\overline{HC}=1$ ， $\overline{DE}=7$ ，  
 試求 $\overline{FG}$ 之值為何？



- (A)  $2\sqrt{22}$  (B)  $6\sqrt{3}$  (C)  $3\sqrt{15}$   
 (D) 9 (E)  $3\sqrt{10}$

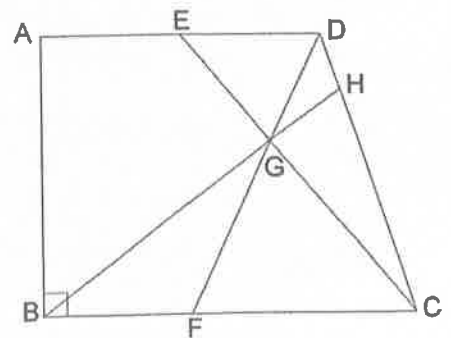
9. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=12$ ， $\overline{AC}=20$ ， $\overline{BC}=28$ ， $\angle BAC=120^\circ$ 。D為 $\overline{BC}$ 中點，  
 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 於E， $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ 於F， $\overline{AD}$ 與 $\overline{EF}$ 交於G。則 $\frac{\triangle DEG \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}}$ 的值為何？

- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{3}{28}$  (C)  $\frac{7}{60}$  (D)  $\frac{10}{123}$  (E)  $\frac{15}{416}$ 。



10. 如圖，梯形ABCD中 $\angle B$ 為直角，E為 $\overline{AD}$ 中點，且 $\overline{BF}:\overline{FC}=2:3$ ，G為 $\overline{EC}$ 與 $\overline{FD}$ 交點， $\overline{BG}$ 直線交  
 $\overline{DC}$ 於H，若 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$ ，且 $\overline{BC}=8$ ，求 $\frac{\triangle DGH \text{面積}}{\triangle GBF \text{面積}}$ 的值為何？

- (A)  $\frac{2}{9}$  (B)  $\frac{2}{13}$  (C)  $\frac{3}{16}$  (D)  $\frac{5}{26}$  (E)  $\frac{8}{43}$ 。



二、填充題：(5 題，共 25 分)

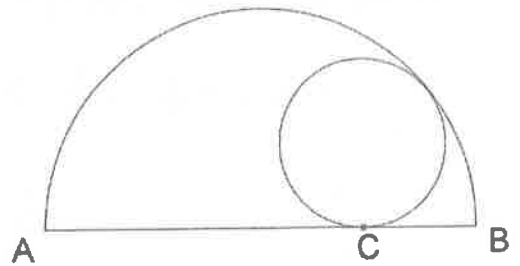
1. 小明請姊姊猜數碼  $A, B$  構成的兩位數相乘運算  $\overline{AB} \times \overline{BA} = ( \quad )$ ，其中相同的字母代表相同的數碼，姊姊猜 196，小明說不只三位數而已，不過妳猜對了個位數且所有的數碼總和也相同。試推論出相乘後的答案  $( \quad ) = ?$
2. 已知由  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 、 $g(x) = -x + 5$  兩圖形所圍成的封閉區域  $K$ ，若作直線  $L$  垂直  $x$  軸，分別與封閉區域  $K$  的邊界交於  $P, Q$  兩點，求在封閉區域內的  $\overline{PQ}$  長之最大值為何？
3. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 這些數中任意選出三個相異的數，不考慮選出的順序，試問有多少組數能滿足「三數乘積是一完全平方數」？(例如：3, 6, 8 即為符合條件的一組數。)
4. 已知  $f(x)$  是 10 次多項式，若  $f(x) = 0$  的 10 個根為  $1 \times 2$ 、 $3 \times 4$ 、 $5 \times 6$ 、 $7 \times 8$ 、 $9 \times 10$ 、 $11 \times 12$ 、 $13 \times 14$ 、 $15 \times 16$ 、 $17 \times 18$ 、 $19 \times 20$ ，則  $f(x^2 + x) = 0$  的 20 個根之總和為？
5. 平行四邊形  $ABCD$  中， $E$  為  $\overline{BC}$  中點， $\overline{AE}$  與  $\overline{BD}$  交於  $F$ 。若  $\overline{AB} = \overline{AE}$ ，且  $\overline{EF} : \overline{BE} : \overline{BF} : \overline{FD} = 1 : 2 : 2 : 4$ ，則  $\angle BDC = ?$

三、計算證明題：(3 題，共 25 分) (給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

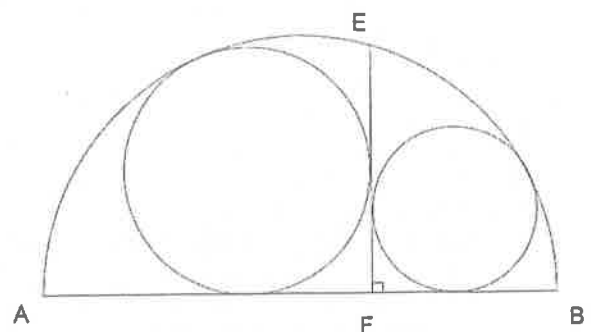
1. 小科一家人到迴轉壽司店用餐，店內用來盛放壽司的盤子有紅、銀、金 3 種顏色，單價分別為 40 元、60 元、80 元。小科一家人用完餐後，共拿了 30 個盤子，總金額是 1700 元。小科發現，其中一種顏色的盤子數量，是另外兩種顏色盤子數量之和。試問：小科一家人各種顏色的盤子各拿了多少個？(5 分)

2. (1) 右圖的半圓內有一個內切圓與直徑  $\overline{AB}$  相切於  $C$  點，若小圓半徑  $r$ ， $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ，

試證明： $r = \frac{ab}{a+b}$  (4 分)



- (2) 右圖的半圓中  $\overline{AB}$  為其直徑，且  $\overline{EF}$  垂直  $\overline{AB}$ ，又半圓內的兩個內切圓分別都和  $\overline{EF}$  相切，左右兩圓的半徑分別為 12 和 8，求直徑  $\overline{AB}$  的長？(6 分)



3. 如右圖，給定一個銳角三角形  $\triangle ABC$ ，其中  $M$  為  $\overline{BC}$  的中點。設圓  $O$  通過  $A$  且與  $\overline{BC}$  相切於  $C$ 。若直線  $AM$  交圓  $O$  於  $D$ ，連接  $\overline{BD}$  並延長此直線交圓  $O$  於另一點  $E$ 。連接  $\overline{AE}$ 。

試證：(1)  $\triangle ABM \sim \triangle BDM$  (5 分)

(2)  $\angle BAC = \angle CAE$  (5 分)

