

數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 測驗時間 10:40~12:00，共 80 分鐘。
2. 本試卷共二大題(選擇題 14 題，計算證明題 3 題)，共計 100 分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色 2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液(帶)。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負，不得提出異議。
4. 計算證明題請依說明書寫於答案卷上，寫於題目卷不予計分。
5. 可利用試卷中空白部分計算。
6. 本科目不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
7. 試題本及答案本(卷)如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。

一、單選題：共 14 題，每題 5 分，共 70 分。

() 1. 擲一個公正骰子三次並記錄每次點數，求此三次中至少有兩次點數相同的機率為？

- (A) $\frac{6}{36}$ (B) $\frac{7}{36}$ (C) $\frac{8}{36}$ (D) $\frac{12}{36}$ (E) $\frac{16}{36}$

() 2. 已知 a 、 b 為二正整數，且 $1 \leq a \leq 9$ 、 $1 \leq b \leq 9$ 。 $y = f(x) = x^2 + ax + b$ 為某二次函數圖形，求此圖形與 x 軸之兩交點距離大於 6 的情形有幾種？

- (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

() 3. 已知 a 、 b 為二正整數，且 a 為某直角三角形的斜邊、 b 與 24 為該直角三角形的兩股。求滿足上述條件的直角三角形共有幾個？

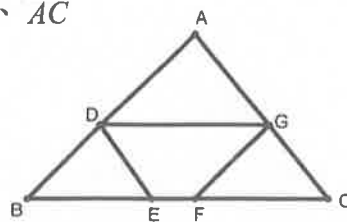
- (A) 7 (B) 14 (C) 15 (D) 20 (E) 21

() 4. 依次將正整數 1, 2, 3, ... 的平方數排成一列，得 149162536496481100121144...，排在第 1 個位置的數字是 1，排在第 5 個位置的數字是 6，排在第 12 個位置的數字是 6，則排在第 2020 個位置的數字為何？

- (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

() 5. 如右圖， $\triangle ABC$ 的面積為 1，點 D 、 G 、 E 、 F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 上，若 $\overline{AD} > \overline{BD}$ ， $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$ ，則梯形 $DEFG$ 面積的最大可能值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$



() 6. 有標示 0、1、2 的數字卡牌各 1 張，每次取 1 張，可重複取，共取 4 次並依次記錄每次數字。求此有次序性之 4 次數字算術平均數為整數的所有情形數有幾種？

- (A) 4 (B) 5 (C) 21 (D) 50 (E) 51

() 7. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 95^2$ 這 95 個數中，其十位數字為奇數的數有幾個？

- (A) 10 (B) 15 (C) 19 (D) 20 (E) 29

() 8. n 為自然數，定義 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ，則

$$\frac{(2020! + 2019!)(2018! + 2017!)(2016! + 2015!) \cdots (4! + 3!)(2! + 1!)}{(2020! - 2019!)(2018! - 2017!)(2016! - 2015!) \cdots (4! - 3!)(2! - 1!)} = ?$$

(A) 2018 (B) 2019 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2022

() 9. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle D = 90^\circ$ ， M 是 $\overline{AB}$ 的中點。

若 $\overline{CM} = \frac{13}{2}$ ， $\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 17$ ，則梯形 $ABCD$ 的面積為何？

(A) 30 (B) $\frac{65}{2}$ (C) 34 (D) 36 (E) 39

() 10. 先將數字 0、0、1、1、1 任意排成一數列，利用排成之數列製造下層數列，

規則為：

(1) 上層數列連續兩數為相同數，則填入 0

(2) 上層數列連續兩數不為相同數，則填入 1

利用此規則繼續往下層製造，至只剩一數為止

1、1、0、1、0
0、1、1、1
例如：1、0、0
1、0
1

試問 0、0、1、1、1 任意排成一數列，有多少個數列其最後一層為 1。

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

() 11. 若多項式 $f(x) = x^5 + x + 1$ 可質因式分解成 $P_1(x) \cdot P_2(x)$ ， $P_1(x)$ 、 $P_2(x)$ 的次數分別為

二次、三次且最高次數項係數皆為 1，則 $P_1(2) \cdot P_2(4) = ?$

(A) 49 (B) 147 (C) 105 (D) 245 (E) 343

() 12. 對任何正整數 x ，設 $S(x)$ 為 x 所有位數上的數字之和，例如： $S(25) = 2 + 5 = 7$ ，

$S(376) = 3 + 7 + 6 = 16$ 。若不大於 1000 的正整數 x ， $S(x)$ 與 $S(x+1)$ 皆為奇數，則

滿足上述條件的 x 有幾個？

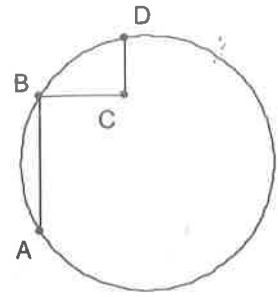
(A) 41 (B) 46 (C) 53 (D) 54 (E) 78

() 13. 如圖，平面上有一圓，圓上有三點 A 、 B 、 D ，

圓內有一點 C ，且 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 、 $\overline{AB} = 4$ 、

$\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{CD} = 2$ ，則此圓的直徑為何？

- (A) $\sqrt{65}$ (B) $5\sqrt{5}$ (C) $\frac{\sqrt{205}}{2}$ (D) $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{689}}{4}$



() 14. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，觀察數列 $f(1)$ 、 $f(3)$ 、 $f(5)$ 、 $f(7)$ 、 $f(9)$ 、 $f(11)$ 、.....

令其第一階差數列為 $f_1(1) = f(3) - f(1)$ 、 $f_1(3) = f(5) - f(3)$ 、 $f_1(5) = f(7) - f(5)$ 、.....

第二階差數列為 $f_2(1) = f_1(3) - f_1(1)$ 、 $f_2(3) = f_1(5) - f_1(3)$ 、 $f_2(5) = f_1(7) - f_1(5)$ 、.....

其關係可用下圖表示：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 f(1) & & f(3) & & f(5) & & f(7) & & f(9) & & f(11) & & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 f_1(1) & & f_1(3) & & f_1(5) & & f_1(7) & & f_1(9) & & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 f_2(1) & & f_2(3) & & f_2(5) & & f_2(7) & & \dots
 \end{array}$$

已知第二階差數列為等差數列且公差為 144，則 a 之值為何？

- (A) -2 (B) 2 (C) -3 (D) 3 (E) 4

二、計算證明題：共 3 題，每題 10 分，共 30 分。

1. 中國為因應新冠病毒疫情，欲於某地建造一方艙醫院，現有隔間板材一塊，高 2 公尺，長 P 公尺，厚度不計。此方艙醫院擬規劃 $2n$ 間地板面積一樣大的無門窗房間，俯視圖如下。

房間 1	房間 2	房間 3	...	房間 $n-2$	房間 $n-1$	房間 n
房間 $n+1$	房間 $n+2$	房間 $n+3$	...	房間 $2n-2$	房間 $2n-1$	房間 $2n$

今將該塊隔間板材高度不變的縱向切割，使其滿足下列條件：

- (a) 水平隔間板材(圖中任一水平線段)高度皆 2 公尺、長度皆為 x ；長度總和 $x \cdot n$
 (b) 鉛直隔間板材(圖中任一鉛直線段)高度皆 2 公尺、長度皆為 y ；長度總和 $2y \cdot (n+1)$
 (c) $x \cdot n + 2y \cdot (n+1) = P$

試求 $x:y$ 為多少時，可使每個房間有最大面積。

2. 四個兩兩互異的正整數，其任兩數之和分別為 26、29、35、93、99、102，求此四數。

3. 平面上有一長方形 $ABCD$ ， E 、 F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 上的點。若 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADF$ 、 $\triangle CEF$ 的

面積分別為 a 、 b 、 c ，試證明 $\triangle AEF$ 的面積為 $\sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}$ 。

