甄選證號：

姓名：

109學年度 國立成功大學/臺南一中科學班　實驗實作

數學科(試題本)

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

1. 試題共6題，共計100分。
2. 測驗時間15:10～16:40，共90分鐘。
3. 本測驗不另外提供計算紙，請利用此試題本空白處作為計算用。
4. 務必將作答過程及答案書寫於**答案本**，並請分配好空間作答。
5. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
6. 請務必將甄選證號及姓名書寫於右上方欄位。
7. 測驗結束後，請將試題本、答案本放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

1. (1)已知 a、b 為二整數，請求出滿足 $4a^2-b^2+20a+2b+19=0$ 的所有整數解(4%)

(2)已知 a、b 為二整數，請求出滿足 $3a^3-b^2+18a-6b-30=0$ 的所有整數解(12%)

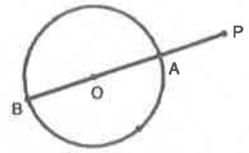
2. 一個正整數 n 若能表示為若干個正整數的和，且這些正整數的倒數和恰為 1，則稱 n 為"奇特數"。例如：$22=2+4+8+8$ 且 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$，故 22 就是一個"奇特數"。

(1)試證：11 為"奇特數"。 (2%)

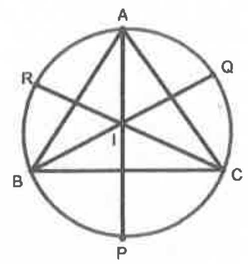
(2)試證：若 n 為"奇特數"，則 $2n+2$ 及 $2n+9$ 皆為"奇特數"。(8%)

(3)試證：2020 為"奇特數"。(6%)

3. (1)如右圖，一圓之圓心為 O，P 點為圓外一定點，直線 OP 交圓於 A、B 兩點，試證：點 P 與圓周上之點的最小距離為 $\overline{PA}$ 長，最大距離為 $\overline{PB}$ 長。(8%)

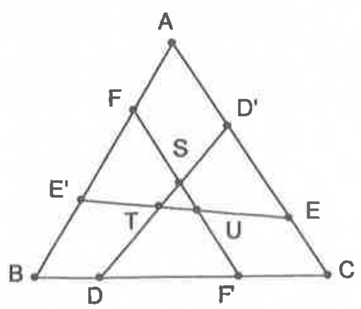


(2)如右圖，ΔABC 之 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的內角平分線分別交外接圓於點 P、Q、R，令 ΔABC 的內心(即為三內角的角平分線交點)為 I，試證：$\overline{IP}+\overline{IQ}+\overline{IR}>\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})$。(8%)



4. (1)平面上有一三角形 ABC，D 為 $\overline{BC}$ 上一點且 $\overline{BD}<\overline{CD}$，若 P 為 $\overline{BC}$ 中點，過 P 作 $\overline{AD}$ 之平行線交 $\overline{AC}$ 於 D'，試証：四邊形 $ABDD'$ 面積等於 $\Delta CDD'$ 面積。(8%)

(2)定義(1)中的 D' 為 D 所對應之面積平分點。若平面上有一三角形 ABC，D、E、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的點且 $\overline{BD}<\overline{CD}$、$\overline{CE}<\overline{AE}$、$\overline{AF}<\overline{BF}$，$D'$、$E'$、$F'$ 分別為 D、E、F 所對應之面積平分點，$\overline{DD'}$ 與 $\overline{FF'}$ 相交於 S、$\overline{DD'}$ 與 $\overline{EE'}$ 相交於 T、$\overline{EE'}$ 與 $\overline{FF'}$ 相交於 U，則 $\dfrac{\text{四邊形AFSD'面積+四邊形BDTE'面積+四邊形CEUF'面積-}\Delta\text{STU面積}}{\Delta\text{ABC面積}}=?$ (8%)



5. 若正整數 n 可寫成 2^k，其中 k 為正整數或零，則稱 n 是 2 的冪次。例如 1,2,4,8,⋯等都是 2 的冪次。試證：

(1)若 n 是 2 的冪次，則 n 無法寫成兩個或兩個以上的連續正整數之和。(4%)

(2)若 n 不是 2 的冪次，則 n 可寫成兩個或兩個以上的連續正整數之和。(12%)

6. 多項式 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，

定義：

$e_0(f(x))=1$、

$e_1(f(x))=\alpha+\beta+\gamma$(即 $f(x)=0$ 的三根之和)、

$e_2(f(x))=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$(即 $f(x)=0$ 的三根任取兩個乘積不重複之和)、

$e_3(f(x))=\alpha\beta\gamma$ (即 $f(x)=0$ 的三根任取三個乘積不重複之和)、

$p_n(f(x))=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$(即 $f(x)=0$ 的三根各別 n 次方之和，n 為自然數)。

故 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-e_1(f(x))x^2+e_2(f(x))x-e_3(f(x))$

(1)試証：$2\cdot e_2(f(x))=e_1(f(x))\cdot p_1(f(x))-e_0(f(x))\cdot p_2(f(x))$ (2%)

(2)利用 $\begin{cases} f(\alpha)=\alpha^3-e_1(f(x))\alpha^2+e_2(f(x))\alpha-e_3(f(x))=0 \\ f(\beta)=\beta^3-e_1(f(x))\beta^2+e_2(f(x))\beta-e_3(f(x))=0 \\ f(\gamma)=\gamma^3-e_1(f(x))\gamma^2+e_2(f(x))\gamma-e_3(f(x))=0 \end{cases}$，

証明：$3e_3(f(x))=e_2(f(x))\cdot p_1(f(x))-e_1(f(x))\cdot p_2(f(x))+e_0(f(x))\cdot p_3(f(x))$ (3%)

(3)若 $p_1(f(x))=\alpha+\beta+\gamma=1$、$p_2(f(x))=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2$、$p_3(f(x))=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3$，

①利用(1)、(2)及 $g(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，求出

$p_4(g(x))=p_4(f(x))=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ 之值。(7%)

②利用(1)、(2)、①及 $h(x)=x^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，求出

$p_5(h(x))=p_5(f(x))=\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ 之值。(8%)