

數學科題目卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

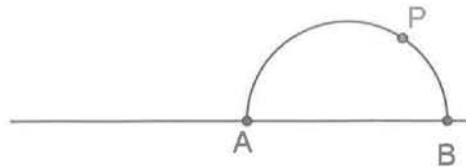
請閱讀以下測驗作答說明：

1. 本試題共 6 題，共計 100 分。
2. 測驗時間從 8:10~9:40，共 90 分鐘。
3. 此題目卷僅供參閱題目及計算用，請務必將答案寫於答案卷中。
4. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。

1. 三正數 a_1 、 a_2 、 a_3 成等差且公差不等於 0，

(1) 證明 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} > \frac{2}{a_2}$; (7%) (2) 證明 $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} > \frac{2}{a_2^2}$ 。 (7%)

2. 已知半圓上一點 P ，求作直徑 AB 延長線上一點 Q ，使 \overline{PQ} 與半圓交於一點 R 恰為 \overline{PQ} 中點。
必須證明你的作法是正確的。(8%)(7%)



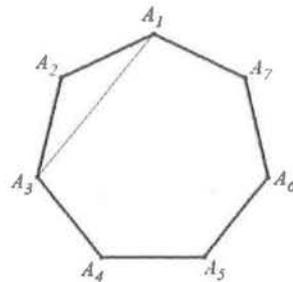
3. 設 $a \geq b \geq c$ 均為正整數，且滿足 $abc = 3(a-1)(b-1)(c-1)$ 。

- (1) 試證： $1 < c < 4$ (7%)
 (2) 試求序組 (a, b, c) 所有可能的值？(8%)

4. (1) 證明右圖正 7 邊形的對角線 $\overline{A_1A_3}$ 平行 $\overline{A_5A_6}$ 。(5%)

(2) 證明正 $2n+1$ 邊形 ($n \geq 2$) 的任一對角線必定平行此正多邊形的某一邊。(8%)

(3) 正 $2n$ 邊形 ($n \geq 3$) 的所有對角線中，其中與此正多邊形的某一邊平行的對角線有幾條？(8%)



5. 試證：滿足 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ， $\overline{AB} > \overline{AD}$ 的凸四邊形 $ABCD$ 必有內切圓。(15%)

6. 觀察下列式子

$$1^3 = 1^2,$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = (1+2+3+4+5)^2$$

事實上，已知對於任意的正整數 n ，下列等式是成立的：

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 \dots \textcircled{1}$$

法國數學家 J.Liouville(1809~1882)將這個等式給了一個神奇的推廣。設 N 是正整數， d_1 、 d_2 、 d_3 、 \dots 、 d_k 是 N 的所有正因數，而 d_1 、 d_2 、 d_3 、 \dots 、 d_k 的正因數個數分別為 c_1 、 c_2 、 c_3 、 \dots 、 c_k ，則下列等式成立：

$$c_1^3 + c_2^3 + c_3^3 + \dots + c_k^3 = (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_k)^2 \dots \textcircled{2}$$

請回答以下問題：

(1) 取 $N=12$ ，驗證 $\textcircled{2}$ 式成立。(5%)

(2) 若 $N=p^n$ ，其中 p 是質數、 n 是正整數，驗證 $\textcircled{2}$ 式成立。(5%)

(3) 若 $N=p^{n_1}q^{n_2}$ ，其中 p 、 q 是相異質數， n_1 、 n_2 是正整數，驗證 $\textcircled{2}$ 式成立。(10%)

