一、單選題：14 題，每題 5 分，共 70 分

1. 設 $m>0$, $n>0$ 滿足 $\frac{m}{m+n}+\frac{m}{n}=1$ ，試求 $\frac{n}{m}$ 之值？

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$

2. 設 $m\le 25$ 為正整數，若方程式 $x^2-3x+(2-m)=0$ 兩根皆為有理數，求滿足條件的 m 有幾個?

(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 10

3. 化簡 $\left(\frac{1}{107\times 109}+1\right)\times\left(\frac{1}{108\times 110}+1\right)\times\left(\frac{1}{109\times 111}+1\right)\times\left(\frac{1}{110\times 112}+1\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{213\times 215}+1\right)=?$

(A) $\frac{216}{215}$ (B) 1 (C) $\frac{72}{71}$ (D) $\frac{109\times 215}{107\times 213}$

4. 數列< a_n >為等差，前 n 項級數和為 S_n，以下有四敘述：

敘述一：存在等差數列 $a_4\ge 1$, $a_6\le 6$, $a_8\ge 10$

敘述二：存在等差數列 $a_4\ge 5$, $a_6\le 7$, $a_8\ge 11$

敘述三：存在等差數列 $a_7=1$, $S_{13}=13$

敘述四：存在等差數列 $S_3=10$, $S_6=20$, $S_9=40$

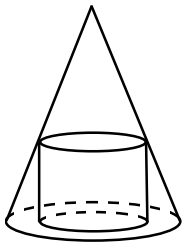
試判斷以上敘述的對錯？

(A)全部都錯誤 (B)只有敘述一正確 (C)只有敘述二錯誤 (D)只有敘述一、敘述三正確

5. 大雄答對四選一數學選擇題的機率為 $\frac{1}{2}$ 。某次段考選擇第 10 題明吉不會，不小心看到大雄答案選 A，明吉為了表示清白，因而從另三個選項 B、C、D 任猜一個作答。試問明吉選擇第 10 題答對的機率？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

6. 如右圖，有一個直圓柱，其底圓直徑與高相等，且內接於一個直圓錐內，使得直圓柱與直圓錐的中心軸重合。若直圓錐的底圓直徑為 9，高為 12，試求直圓柱的底圓半徑？



(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{18}{7}$ (D) $\frac{30}{11}$

7. 平面直角坐標中，圓 C 的圓心 P(2 , 1)、半徑 13，Q(−2 , 4)是圓 C 內部的一點，試問過 Q 點的所有弦中，長度為整數的有幾條？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

8. 設 a、b 為正整數且 c 為整數，已知多項式 $x^3+ax^2-bx-12$ 分別除以 x^2+4x+9 與 $x+c$ 皆得到相同的餘式，求 c 值?

(A) −3　(B) −1　(C) 1　(D) 3

9. 二次函數 $f(x)=a(x+2)^2+b$，已知 $f(-4)>0$，　$f(-5)<0$，試比較：$f(-4)$、$f(-1)$、$f(1)$、$f(4)$的大小？

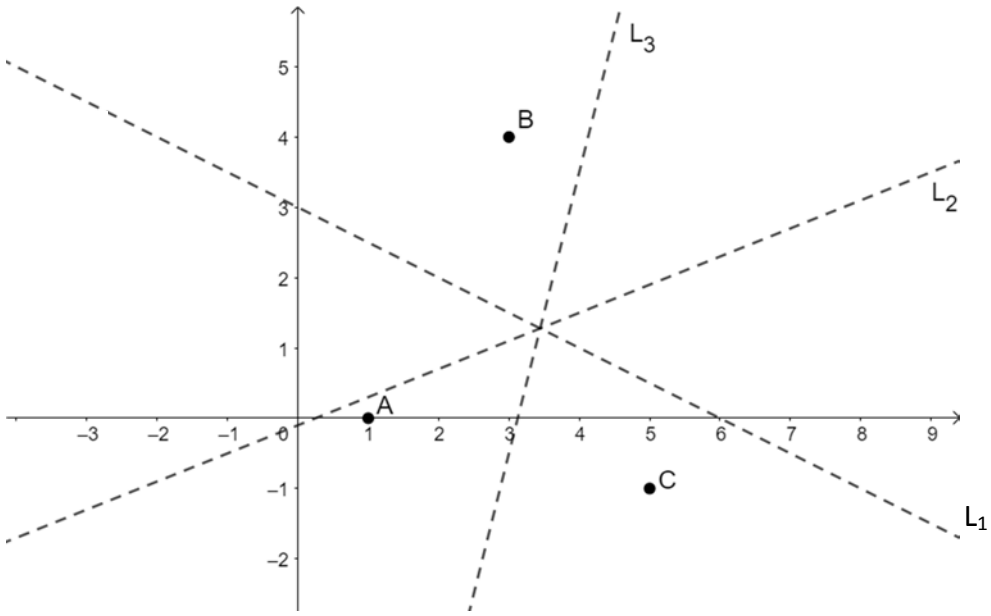
(A) $f(-4)<f(-1)<f(1)<f(4)$

(B) $f(4)<f(1)<f(-4)<f(-1)$

(C) $f(4)<f(-4)<f(-1)=f(1)$

(D) $f(4)<f(-4)<f(-1)<f(1)$

10. 如下圖，坐標平面上三點 A = (1 , 0)、B = (3 , 4)、C = (5 , –1)，L_1、L_2、L_3 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中垂線。



在哪個條件限制下<u>一定無法</u>作出一圓使得 A、B 兩點皆在圓內且 C 點在圓外?

(A)圓心在第四象限

(B)圓心在第一象限且半徑小於$\sqrt{6}$

(C)圓心在第二象限且半徑小於$\sqrt{10}$

(D)圓心在第三象限且半徑小於$\sqrt{26}$

11. 如右圖所示為一魔方陣，即每一橫列、每一縱行及每一對角線上所有數的和都相等，求 $c+e$ 之值?

(A) 75 (B) 79 (C) 83 (D) 86

a	44	d
38	b	e
45	c	41

12. 有 119 個一定說實話或一定說謊話的人圍成一個大圓圈，智者為了知道說實話的人數，問了兩個問題：

「如果你右手邊那人是說實話的，請舉手」，結果有 103 人舉手。

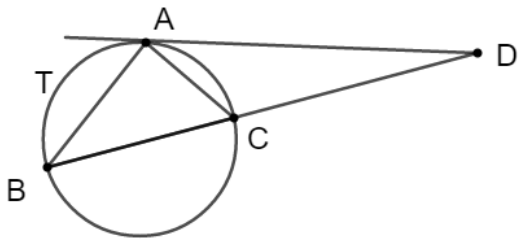
「如果你左手邊那個人，上一題有舉手的，請舉手」，結果有 68 人舉手。

請問說實話的人數最接近?

(A) 20 (B) 35 (C) 50 (D) 65

13. 如右圖，圓 T 為△ABC 外接圓，$\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$。過 A 點作圓 T 之切線交直線 BC 於 D 點，試求△ABC 與△ABD 的面積比？

(A) 3：5 (B) 4：7 (C) 5：9 (D) 6：11



14. 設 x 為整數，函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$。已知 $f(1)=3$，求 $f(107)=?$

(A) 3 (B) –2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{3}$

二、計算證明題：3 題，每題 10 分，共 30 分。

(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. 設 $a\cdot q^2+b\cdot pq+c\cdot p^2=0$，其中 a、b、c 為整數，且 p、q 為互質的正整數。

   試證：a、b、c 中至少有一個是偶數。

2. 已知四邊形 ABCD 中，四個頂點 A、B、C、D 依逆時鐘順序排列，且 $\angle A>\angle D$，$\angle B>\angle C$，$\angle B+\angle C<180°$。

   (1) 試繪出一個符合條件的四邊形 ABCD。 (5 分)

   (2) 試證明 $\overline{AB}<\overline{CD}$。 (5 分)

3. 已知七個數據資料 1、3、3、4、5、x、x 的算術平均數大或等於中位數，試求出所有滿足的實數 x。