1.考慮具有下列兩性質的數列：

(a)每項均為三位數。

(b)每一項的十位數字與個位數字分別是下一項的百位數字與十位數字，而最後一項的十位數字與個位數字是第一項的百位數字與十位數字。

例如：247 , 475 , 756 ,⋯, 824 就是一個符合性質的數列。

(1)試完成上述例子 247 , 475 , 756 ,⋯, 824 中的⋯，作答方式由 247 寫到 824，須寫出三個項數分別為 6、7、8 的例子。 (7 分)

(2)設 S 表示任一個符合性質的數列之各項總和，試證明 S 必為 111 的倍數(寫出數學式子的推導過程)。 (8 分)

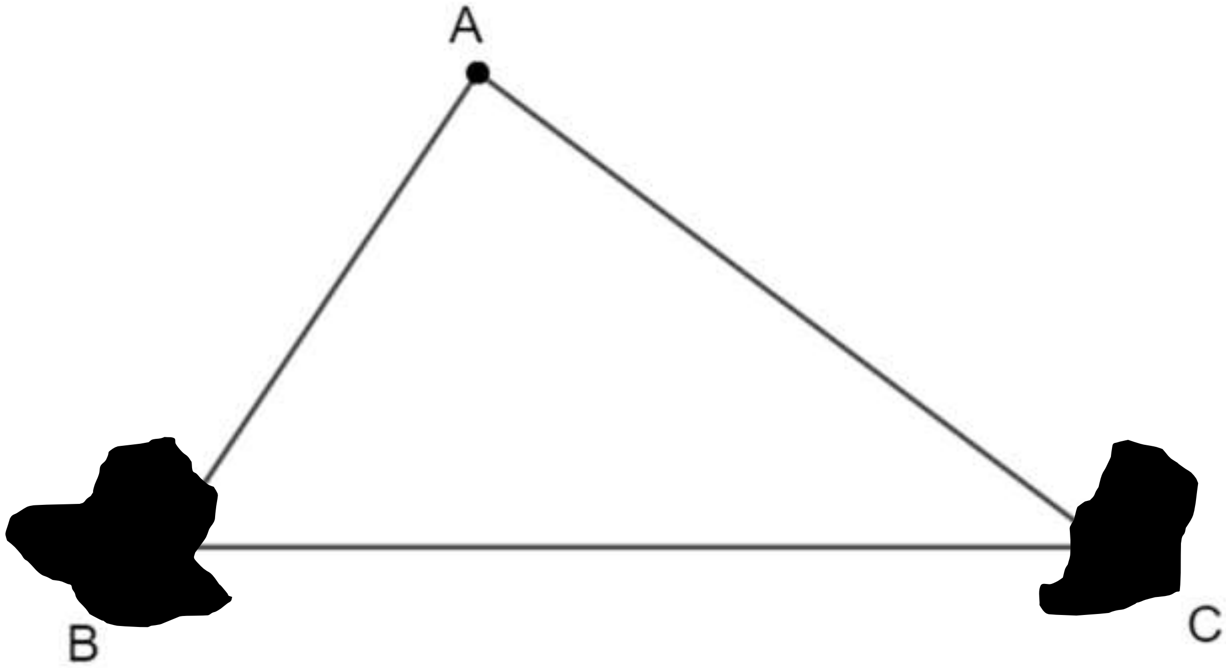
2.設數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1 = -2$，$a_{n+1} = -1 + a_n + 2\sqrt{a_n + 2n}$ ($n \ge 1$)，數列$\langle b_n \rangle$定義為$b_n = 2\sqrt{a_n + 2n}$ 。

(1)試證明數列$\langle b_n \rangle$為等差數列並找出公差。 (7 分)

(2)數列$\langle a_n \rangle$中數字最小的是哪一項? 請說明理由。 (8 分)

3.如圖，ΔABC 的頂點 B、C 被打翻的墨水覆蓋(黑影部分，其範圍不可作圖)。試利用尺規作圖找到 $\overline{BC}$ 的中點 M。

(須保留作圖痕跡並寫出作法及證明)　(10 分)



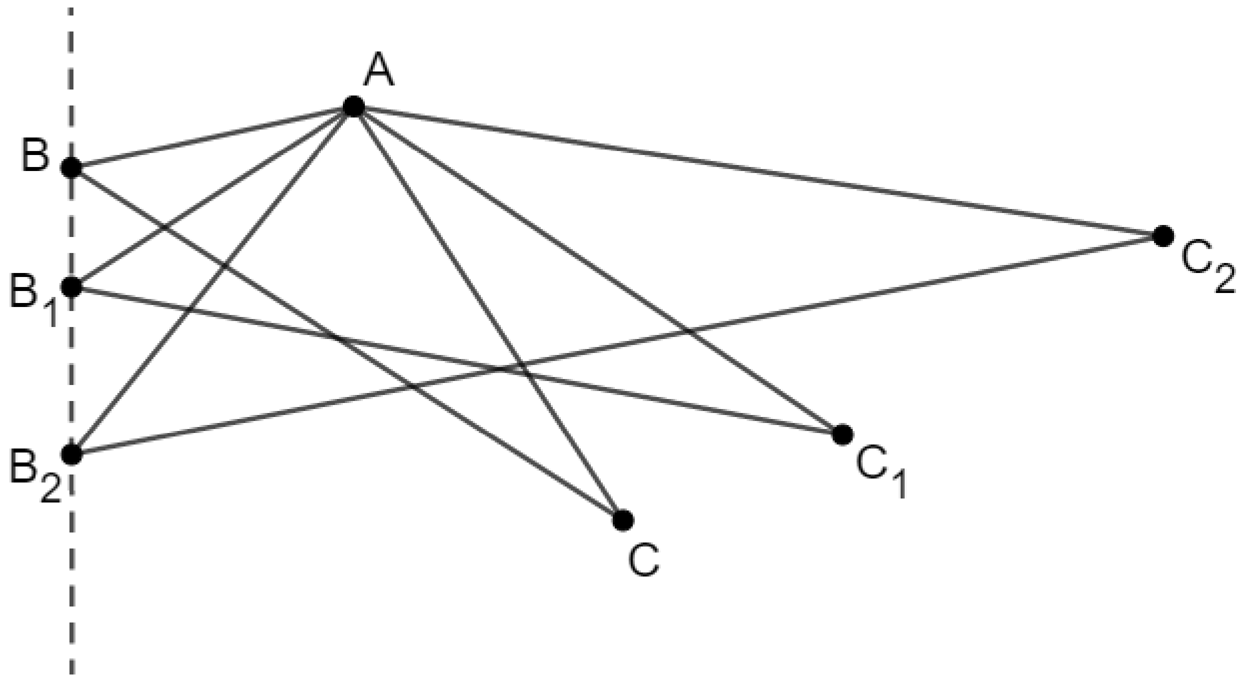
[作法]：

[證明]：

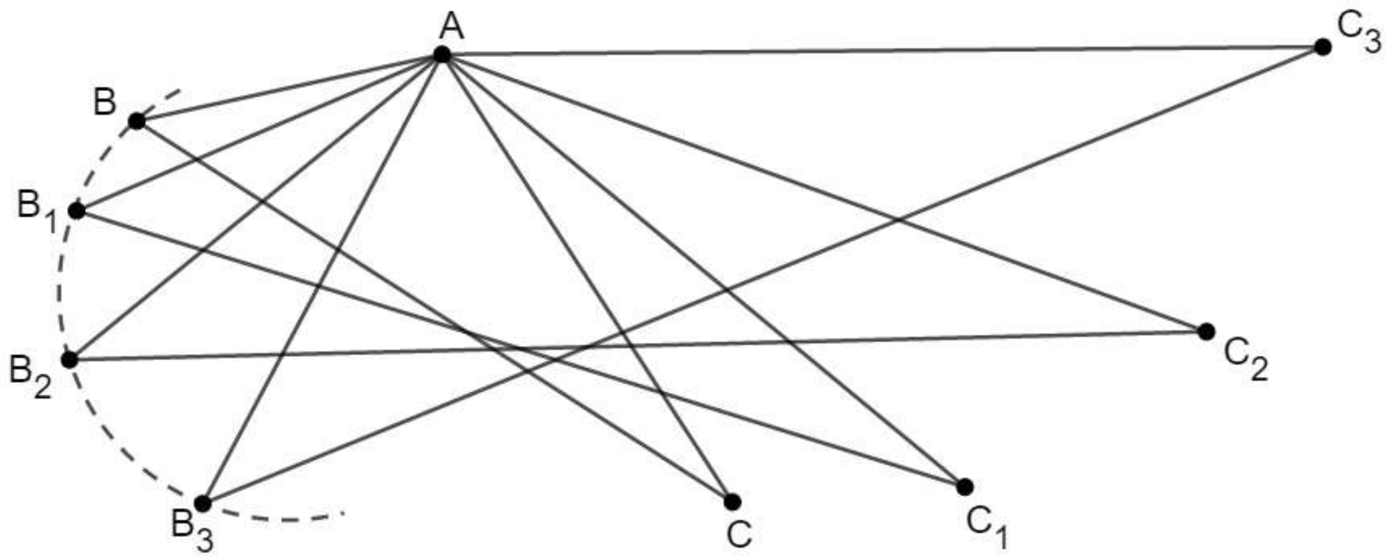
4.我們想知道：固定三角形的一個頂點 A，將另一個頂點 B 沿直線或圓弧移動，作出的相似三角形們之第三個頂點 C 軌跡。

(1)如下圖，B 點沿某直線移動經過 B_1、B_2 兩點且 $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$，試證明$\angle AB_1B = \angle AC_1C$。 (6 分)

(2)試證明 C、C_1、C_2 三點共線。 (7 分)



(3)如下圖，B 點沿某圓弧移動經過 B_1、B_2、B_3 三點且 $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2 \sim \Delta AB_3C_3$，
試證明 C、C_1、C_2、C_3 四點共圓。 (7 分)



5.有一個$n\times n$($n\geq 2$)的方格表，一開始方格的顏色如西洋棋盤般黑白相間，且最左上角的方格為黑色，如圖 5-1 為4×4的方格表一開始狀態。每一次的操作可以任意選擇一個2×2的田字形四方格來變色，被選到的四個方格其顏色會由黑變白或由白變黑。為方便表示，可將第 i 列第 j 行的方格表示成「**(i , j)**」，如圖 5-2。將田字形四方格表示成「**田(左上方格坐標)**」，如圖 5-3 可表成「田(2 , 3)」。

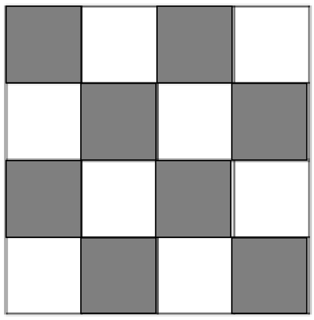


圖 5-1

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

圖 5-2

(2,3)	(2,4)
(3,3)	(3,4)

圖 5-3

以下各小題結論若能做到，請你提供一個方法(寫出你依序想變色的田字形四方格即可)；若結論不能做到，請說明理由。

(1)一開始是4×4的方格表，能否將所有方格都變成白色？ (6 分)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

(2)一開始是7×7的方格表，能否將所有方格都變成白色？ (7 分)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)

(3)一開始是6×6的方格表，能否將所有方格都變成白色？ (7 分)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)

6.設 $f(n)$表 $1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \ldots + n^n$ 之個位數。

對任意正整數 n，能使 $f(n + \mathrm{T}) = f(n)$恆成立的最小正整數 T 定義為 $f(n)$的「**週期**」。

以函數 $g(n)$為例：若 $g(1) =5$, $g(2) = 3$, $g(3) = 8$, $g(4) = 3$, $g(5) = 5$, $g(6) = 3$, $g(7) = 8$, $g(8) = 3$, $g(9) = 5$, $g(10) =3$, $g(11) = 8$, $g(12) = 3$,⋯ 函數值一直重覆循環 5 , 3 , 8 , 3 等 4 個數，就可知 $g(n)$的週期為 4。

(1)試求 $f(7)$、$f(9)$、$f(12)$、$f(17)$、$f(19)$之值? (10 分)

(2)試求 $f(n)$的週期。 (10 分)