

數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 測驗時間從 10:40 到 12:00 共 80 分鐘。
2. 本試卷共二大題(選擇題 14 題，證明題 3 題)，共計 100 分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色 2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液(帶)。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負。不得提出異議。
4. 計算證明題請書寫於答案卷上，寫於題目卷不予計分。
5. 可利用試卷中空白部分計算。
6. 本科目不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
7. 試題本及答案本(卷)如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。

一、單選題：14題，每題5分，共70分

1. 已知 a 、 b 、 c 三數成等差數列，且 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 皆為實數，

$$(a+bx+cx^2)(c+ax+bx^2)(b+cx+ax^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6,$$

若 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = -216$ ，則 b 值為何？

- (A) -6 (B) -2 (C) 0 (D) 6。

2. n 為正整數且 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})-\frac{1}{2} < \frac{106}{2017}$ ，則 n 之最小值為何？

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12。

3. 已知三數 a 、 b 、 c 滿足 $a+b+c=0$ ， $abc=5$ ，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 之值的正負情形為何？

- (A) 必為正數 (B) 必為負數 (C) 必為零 (D) 正數、負數皆有可能。

4. 把由 1 開始的正整數連續不間斷的依序由左而右併排寫成一列，形成一個 201 位的數，

123456789101112131415161718192021.....
201位

則此 201 位數被 9 除之，餘數為何？

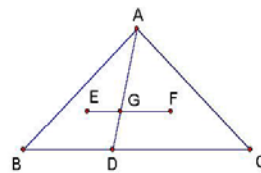
- (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 7。

5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{BC}$ 上， E 點與 F 點分別是

$\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的重心，連接 $\overline{EF}$ ，交 $\overline{AD}$ 於 G 點，

則 $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}$ 的值為何？

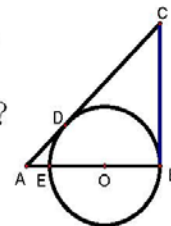
- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 2。



6. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，現有一圓 O 以 $\overline{OB}$ 為半徑，且與 $\overline{AC}$

相切於 D 點，與 $\overline{AB}$ 交於 E 點。若 $\overline{AE} = 1$ ， $\overline{AD} = 2$ ，則 $\overline{CD}$ 長為何？

- (A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) 5。



7. 已知 a 、 b 、 c 皆為整數，多項式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 能被 $x^2 + 3x - 4$ 整除，若 $1 < a \leq c$ ，則 b 值為何？

(A) -10 (B) -7 (C) -4 (D) -1 。

8. x 、 y 、 z 皆為正整數且 $x > y > z$ ，若 $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 1104$ ，則 $x + y + z$ 之值為何？

(A) 32 (B) 34 (C) 36 (D) 42 。

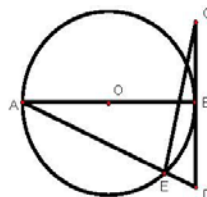
9. 有 2017 位選手參加某項錦標賽，每場比賽由兩位選手出賽，一定要分出勝負，沒有平手的情況。若比賽採單淘汰制（輸 1 場即被淘汰），直到只剩二位選手的冠軍賽則採 5 戰 3 勝制（即先獲得 3 場勝利者為冠軍）。若賽程從頭到尾都沒有出現選手棄賽的情況，則可能的比賽總場數會落在下列哪一個範圍？

(A) 2015~2017 (B) 2018~2020 (C) 2021~2023 (D) 大於 2023。

10. 如右圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑， $\overline{CD}$ 切圓 O 於 B 點，且 $\overline{BC} = \overline{BD}$ ，

$\overline{AD}$ 交圓 O 於 E 點，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{CD} = 12$ ，則 $\triangle CDE$ 的面積為何？

(A) $\frac{432}{25}$ (B) 18 (C) $\frac{305}{16}$ (D) $\frac{96}{5}$ 。

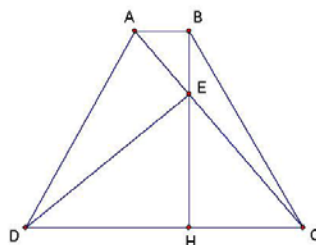


11. 在 1~2017 這 2017 個正整數中，任選 11 個正整數使其成一個等差數列，且公差之值盡可能的大，則這 11 個數的總和之最大值為何？

(A) 10120 (B) 11066 (C) 11099 (D) 11132。

12. 如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{DC} = 10$ 。作 $\overline{BH} \perp \overline{CD}$ 於 H 點， $\overline{AC}$ 交 $\overline{BH}$ 於 E 點，連 $\overline{DE}$ 。若 $\angle AED = 90^\circ$ ，則 $\overline{BC}$ 長最接近下列何者？

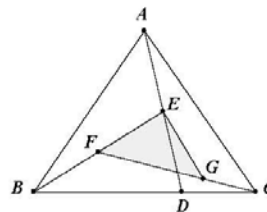
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9。



13. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 上一點， E 為 $\overline{AD}$ 中點，

F 為 $\overline{BE}$ 中點， G 為 $\overline{CF}$ 上一點且 $\overline{FG}:\overline{GC}=2:1$ ，

則 $\frac{\triangle ABC \text{面積}}{\triangle EFG \text{面積}}$ 之值為何？



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。

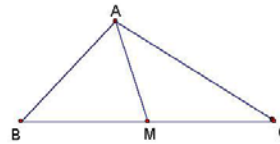
14. 動物園中某一品種的變色龍有灰色、咖啡色、粉紅色共三種體色，且當兩隻不同體色的變色龍相遇會一起變成第三種顏色。比如說，一隻灰色、一隻咖啡色的變色龍相遇，則兩隻都會變成粉紅色。假設現在動物園內已有 30 隻灰色變色龍、53 隻咖啡色變色龍。園方發現，如果 10 隻灰色變色龍和 10 隻咖啡色變色龍相遇，會產生 20 隻粉紅色變色龍。此時，剩下 20 隻灰色變色龍再和 20 隻粉紅色變色龍相遇，83 隻變色龍全部成為咖啡色。為解決這個所有變色龍有機會變成同色的問題，欲置入 n 隻粉紅色變色龍，使所有變色龍不管何種組合，牠們的體色皆不會有機會變成唯一。試問 n 可以是下列何值？

- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80。

二、計算證明題：3 題，每題 10 分，共 30 分
(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 中， M 是 $\overline{BC}$ 的中點，

試證： $\overline{AB} + \overline{AC} > 2\overline{AM}$ 。



2. 已知 n 是正整數，小築現欲將 $1 \sim n$ 這 n 個連續正整數輸入電腦，求其平均數。當他輸入完畢後發現，電腦顯示其只輸入 $(n-1)$ 個整數，且平均數為 $55\frac{9}{11}$ ，若這 $(n-1)$ 個正整數輸入無誤，

(1) 試證： $\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n-1} \leq 55\frac{9}{11} \leq \frac{2+3+\dots+n}{n-1}$ 。(5 分)

(2) 試問所遺漏輸入的正整數為何？(5 分)

3. 四個整數 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 成等差數列，公差為 d 。試證： $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$ 一定是個完全平方數。