106 學年度 國立成功大學與臺南一中高中科學班　實驗實作:實驗操作

數學科目檢定

請不要翻到次頁！ 讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

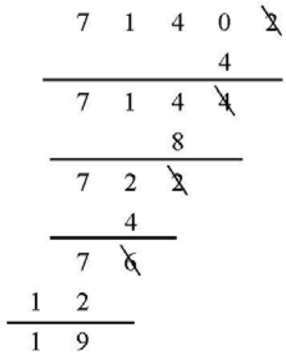
請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明： 1. 本試卷共 5 題，共計 100 分。 2. 測驗時間從 8:10-9:40，共 90 分鐘。 3. 請將答案寫於本卷中。 4. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。

1. （1）試證：四個連續偶數的平方和必為 4 的倍數。　（9 分）

　（2）由數字 3、4、6、7（數字不重複）共可排成 24 個四位數，例如 7463、4736 等等。請從中找出可表成四個連續偶數之平方和的四位數。　（10 分）

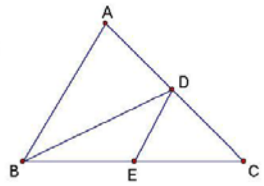
2. 有個判斷「71402 是否為 19 的倍數」之方法如下：首先將 71402 這個數字分成兩部分，一為個位數字，令 $a_1=2$；一為剩餘數字，令 $b_1=7140$，亦即 $71402=10b_1+a_1$。之後將 a_1 乘以 2 後，將其與 b_1 相加，可得 $2\times2+7140=7144$，此完成第一次操作。接下來依相同模式，再將 7144 分成 $a_2=4$ 與 $b_2=714$，之後將 a_2 乘以 2 後，將其與 b_2 相加，可得 $4\times2+714=722$，此完成第二次操作。一直重覆上述的操作，直到得到的數小於 20 就停止。若最後所得的數為 19，則原數 71402 即為 19 的倍數；若最後所得的數不是 19，則原數就不為 19 的倍數。



　（1）對於任意正整數，都可以使用上述方法來判斷是否為 19 的倍數，為什麼？請說明理由。　（10 分）

　（2）請**<u>適當修改</u>**上述方法，寫出判斷 29 的倍數之方法，並證明你（妳）的方法是正確的。（10 分）

3. 如右圖，ΔABC 中，D 為 $\overline{AC}$ 上一動點，過 D 點作 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 E，若 ΔABC 的面積為 1，且假設 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}}=x\quad(0<x<1)$，



　（1）請用 x 分別表示 ΔABD、ΔBDE、ΔCDE 的面積。（6 分）

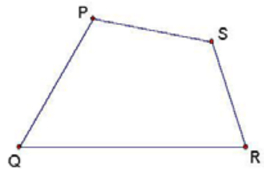
　（2）當 D 點在 $\overline{AC}$ 上移動時，ΔABD、ΔBDE、ΔCDE 面積的大小關係也隨之改變。過程中，不論什麼時候比較這三個三角形面積的大小關係，一定會有個三角形面積為三者中之最大。現在不管哪個三角形的面積最大，我們都假設面積最大者的值為 k（也就是說，k 值在不同時候可能代表不同三角形的面積）。試問：在 D 點移動過程中，k 的最小值為何？　（10 分）

4. 古希臘幾何三大難題之一的「方圓問題」，即是給定一個圓，欲利用尺規作圖求作一個正方形使其面積與圓面積相等，此問題在西元 1882 年已由德國數學家 Lindemann 以代數方法證明無解，因此在尺規作圖上，我們可以改討論其他多邊形的等面積問題。下面有兩個作圖題，請以尺規作圖方式作答，要寫清楚作法，不需證明。

（1）請作一個正方形，使其面積與下圖(4_1)中長方形 $ABCD$ 的面積相等。　（10 分）

（2）如下圖(4_2)，請在直線 QR 上找一點 T，使 ΔPQT 的面積與四邊形 $PQRS$ 的面積相等。　（10 分）

圖(4_1)



圖(4_2)

5. 數學的「無字證明」(proof without words) 是採用「圖說」的方式將事情說清楚，這種數形合一的方式，讓人從觀察、證明到領悟，更能體會數學之美。底下有個這樣的例子：

當 n 為正整數，$1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

我們可將等號右邊 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 這數看作是一個邊長分別為 $(n+1)$ 及 n 之長方形面積的一半，因此首先先畫出一個邊長分別為 $(n+1)$ 及 n 之長方形，如下圖 5 所示。而圖中第一列橫線畫到的實心黑圓點一共是 n 個，用其代表級數中的最後一項 n；其次，第二列橫線畫到的實心黑圓點一共是 $n-1$ 個，用其代表級數中的最後第二項 $n-1$；以此類推；最後一列橫線畫到的實心黑圓點只有 1 個，用其代表級數中的第一項 1。現在將這 n 條橫線畫到的實心黑圓點個數相加，即表示等號左邊的數 $1+2+3+4+...+n$。而圖中空心圓點個數顯然與實心黑圓點個數相等，因此可知實心黑圓點個數為長方形中全部圓點個數的一半，因此此圖即能證得 $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

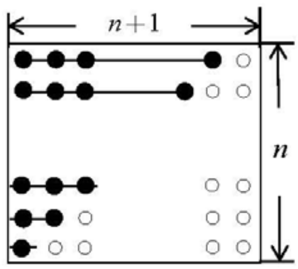


圖 5

（1）當 n 為正整數，請先求出級數

$1+2+3+4+...+(n-2)+(n-1)+n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1$ 的總和後，再利用無字證明的圖解法證明你（妳）的答案是正確的。

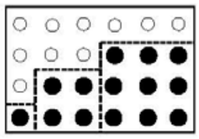
（註：請務必在圖上以線條畫出代表級數中的各項）　（5 分）

（2）分別觀察下列式子

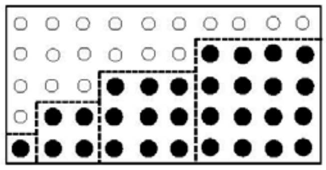
$1^2+2^2+3^2=(1+2+3)\times 4-(1+3+6)$ ……①

$1^2+2^2+3^2+4^2=(1+2+3\times 4)\ 5-(1+3$ ……②

式子①與下圖(5_(2)_1)對應；式子②與下圖(5_(2)_2)對應。



圖(5_(2)_1)



圖(5_(2)_2)

現在請依照上述方法作圖(圖上需框出代表級數中各項的範圍)並推導出以下公式：

當 n 為正整數，$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。　　（10 分）

（3）請利用（1）的結果先推導出以下公式：

當 n 為正整數，$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2$，

再利用無字證明的圖解法證明該式。

（註：請務必在圖上框出代表級數中各項的範圍）　　（10 分）