

數學科目檢定 試卷

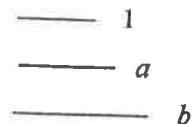
請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

【考試說明】

1. 本試卷共 5 大題，共計 3 頁。
2. 測驗時間從 15:10 到 16:40，共 90 分鐘。
3. 請在答案卷上作答。
4. 本試題卷空白處可做計算之用。
5. 考試完畢後，請將所有器材還原歸位，試題卷、答案卷依序以妥置於桌面，待監考人員收齊並清點結束後方可離開考場。

1. 右圖三線段長度分別為 1、 a 與 b ，請利用尺規作圖，做一長度等於 $a \times b$ 的線段。(必須作圖，寫出作法，並證明) (15%)



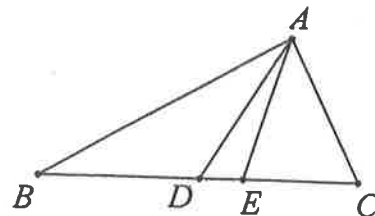
2. 下表為一等差數陣，其中每列、每行都是等差數列， a_{ij} 表示位於第 i 列第 j 行的數， i, j 皆為自然數。例如： $a_{23} = 17$ ，代表第二列第三行的數字為 17。

4	7	10	...	a_{1j}	...
7	12	17	...	a_{2j}	...
10	17	...	...	a_{3j}	...
...	...	...	...	...	...
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	...	a_{ij}	...
...	...	...	...	...	...

- (1) 請寫出 a_{68} 。(5%)
- (2) 請以 i, j 表示 a_{ij} ，並列出推算過程。(5%)
- (3) 請寫出在此等差數陣中，所有出現 184 這個數的位置。(10%)

3. 如圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 分別是 $\overline{BC}$ 上的中線和 $\angle A$ 的角平分線，試證明：

(1) $\angle BAE > \angle BAD$ ； (10%) (2) $\overline{AD} > \overline{AE}$ 。 (10%)



4. 設最簡分數 $\frac{b}{a} < 1$ ， a 、 b 都是正整數， $b > 1$ ，且 $a + b < 100$ 。如果將最簡分數 $\frac{b}{a}$ 的分子減 1、分母不變，則 $\frac{b-1}{a}$ 可約分。將 $\frac{b-1}{a}$ 約為最簡分數後，其分子與分母之和比 $\frac{b}{a}$ 分子與分母之和少了 78。

(1) 試求 a 和 $b-1$ 之最大公因數所有可能值。(10%)

(2) 請找出所有可能的 $\frac{b}{a}$ 。(10%)

5. 有一個「25 匹馬」的問題，其敘述如下：

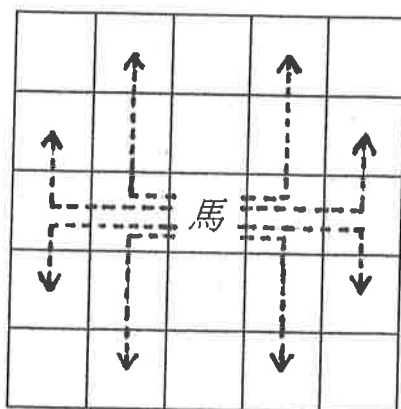
在 5×5 棋盤上擺入 25 隻象棋的「馬」(圖一)，規則類似象棋走法，如圖(二)中的「馬」，其走一步可達位置如圖中八處箭頭所指處。這個「25 匹馬」的問題是問：如果 25 隻「馬」同時走一步，有沒有可能這 25 個位置都還是恰好有一隻「馬」？

這個問題有一個巧妙的解法(圖三)：

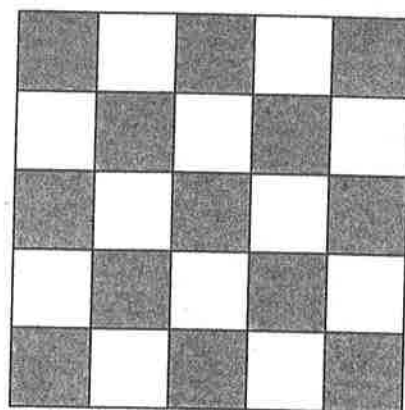
將棋盤間隔塗上黑色與白色，「馬」走一步，黑色格子的「馬」必只能走到白色格子處，而白色格子的「馬」也只能走到黑色格子。如果 25 匹「馬」同時走一步且不重複佔格，則黑色格子與白色格子數目要相同，此問題才會有解。但是黑色格子有 13 個，而白色格子有 12 個，所以這是辦不到的。



圖(一)



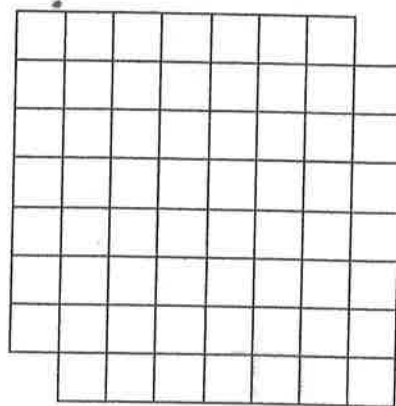
圖(二)



圖(三)

利用上述分析的方法，回答下面問題，並敘述你(妳)的解法和理由。

- (1) 如圖(四)，將 8×8 的方格紙的右上角與左下角截掉，能否用 31 塊 1×2 的矩形方格  覆蓋剩下的 62 個方格？(10%)
- (2) 如(1)， m, n 是正整數，將 $2n \times 2m$ 的方格紙的右上角與左下角截掉，能否用 1×2 的矩形方格覆蓋剩下方格？(8%)
- (3) 如(1)， m, n 是正整數，將 $2n \times (2m+1)$ 的方格紙的右上角與左下角截掉，能否用 1×2 的矩形方格覆蓋剩下方格？(7%)



圖(四)