

數學科目檢定

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下作答說明：

1. 本試卷共六大題。
2. 請依題號於答案卷作答，否則不予計分。
3. 測驗時間從 15：10 到 16：40 共 90 分鐘。
4. 可利用試卷中空白部分計算，與答案不相關者不要在答案卷上書寫。
5. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。

1. (18 分)

把 $\frac{1}{5}$ 這個數字乘上 7 會等於 $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ 。我們把這個乘積大於或等於 1 的整數部分叫做 $x_1 = 1$ ，

再把剩下小於 1 的真分數部分叫做 $y_1 = \frac{2}{5}$ 。這樣就算完成了一次操作。接下來把上一階段

小於 1 的部分 y_1 繼續乘上 7 之後得到 $\frac{14}{5}$ ，然後把乘積中大於或等於 1 的叫做 $x_2 = 2$ ，小於

1 的真分數部分叫做 $y_2 = \frac{4}{5}$ 。這樣就完成了第二次操作。上述的方法，就是把一個數字 a

小於 1 的部分乘上 b ，去觀察乘積大於或等於 1 的部分及小於 1 的部分，完成後下次操作就是再把小於 1 的部分乘上 b 。一直重覆上述的操作之後，直到小於 1 的部分是 0 就停止。

- A. 在題目一開始給的例子中， $a = \frac{1}{5}$ ， $b = 7$ 。試著找出第 n 個階段 ($n > 2$) 的 x_n 及 y_n 。
- B. 如果把 b 改成 6， a 請試所有的分母比 6 小的真分數，你對 x_n 及 y_n 的結論是什麼？
- C. 如果把 b 改成一般的整數，針對 a 是所有的分母比 b 小的真分數，你猜會有什麼樣的結論？為什麼？

答：

此區域請勿作答

(接續下頁)

2. (24 分)

設 a, b 為兩非負實數

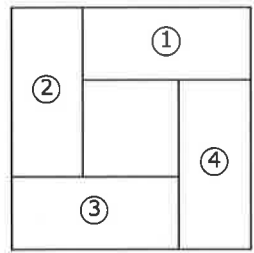
A. 試證明 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (算幾不等式)

B. 若 $a > 0, b > 0$ 恰為長方形之長與寬的長度。有四個這樣子的長方形(右圖, 編號①、②、③、④)排成圖二。試用此圖證明上一題之算幾不等式。

C. 現在有三個正數, 從小到大排成 $0 < a \leq b \leq c$ 。令此三個數的算數平均數為 $M = \frac{a+b+c}{3}$ 。幾何平均數為 $G = \sqrt[3]{abc}$ 。本小題先

證明 $a+c-M \geq \frac{ac}{M}$ 。

D. 利用本大題小題(A.)和小題(C.)的不等式, 證明 $M \geq G$ 。



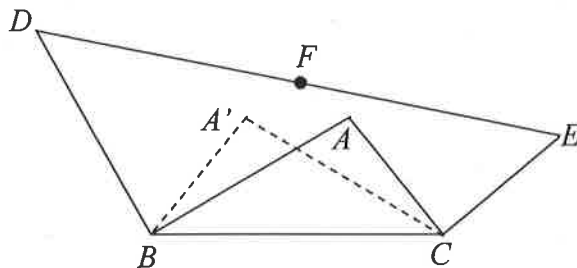
(接續下頁)

3. (20 分)

下圖 ABC 三角形，我們可以透過尺規作圖在 $\overline{AB}$ 的外側(就是與三角形 ABC 不同側的意思)

找到 D 點使得 $\overline{AB} = \overline{BD}$ 且 $\angle ABD$ 是直角。也可以在 $\overline{AC}$ 的外側找到 E 點，使得 $\overline{AC} = \overline{CE}$ ，

且 $\angle ACE$ 是直角。取 F 為 $\overline{DE}$ 中點。



A. 如果選 A' 使得 $\overline{A'B} = \overline{AC}$ ， $\overline{A'C} = \overline{AB}$ ，

並以這一個 A' 點代替 A 點， B 和 C 點不動，重複上述的尺規作圖，試做出相對應的 F' 點？從 F 點及 F' 點的圖中你覺得他們跟 B 、 C 兩點的關係是？

B. 當 ABC 是怎樣的三角形時， A 點會跟 F 點重合？

C. 試著從 D 點及 E 點到直線 BC 的距離，找出 F 到直線 BC 的距離。

D. 總結以上幾點，你對 F 點的看法是？

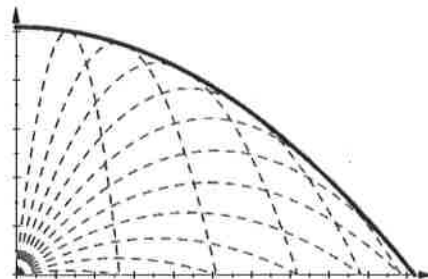
答:

(接續下頁)

4. (18 分)

令 $y = ax - \frac{1}{4}(1+a^2)x^2, a > 0$ ，則當 a 變動的時候會產生一系列的拋物線，如下示意圖(尺寸不見得是正確的)。它可以被想成從原點以同一速度但不同角度所丟出的球在平面上所畫出的軌跡。

- E. $a=1$ 表示球從 45 度方向丟出。請問球距離原點多遠落地(地面 $y=0$)? 而最高可以丟到多高?
- F. 在距離原點 1 單位長($x=1$)時，這個球最高可以丟到多高?
- G. 把這一系列的拋物線，在第一象限可以通過的點全部找出來會形成一個區域，你可以把這個區域最上方的曲線(示意圖之粗線)精確地描述出來嗎?



答:

(接續下頁)

5. (10 分)

“設 x 為任意實數，求 $\frac{2x^2+2x-4}{x^2+x+1}$ 的最大值 = ?”

某生此題過程如下：

$$\text{設 } \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x+1} = k \Rightarrow (k-2)x^2 + (k-2)x + k+4 = 0$$

$$\because \text{設 } x \text{ 為任意實數 } \therefore \text{此方程式有實根} \Rightarrow \text{判別式} \geq 0 \Rightarrow (k-2)^2 - 4(k-2)(k+4) \geq 0$$

$$\Rightarrow (k-2)(3k+18) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq k \leq 2 \quad \therefore \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x+1} \text{ 的最大值} = 2$$

請問答案正確嗎？如果錯誤，請問錯在那裡？錯誤的原因是什麼？並求出正確的答案。

答：

(接續下頁)

6.(10 分)

有一個打掃機器人被設定在此正方形區域以每秒一格的速度，以如下圖數字之排列方式依序由 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \cdots$ 前進清掃，例如第一秒後在數字 2 的位置，以座標 $(2, 1)$ 表示，第二秒後在數字 3 的位置，即座標 $(2, 2)$ ，數字 4 的位置，即座標 $(1, 2)$ 。

(1) 問了 2014 秒後，機器人所在之座標為？

(2) 若機器人往右下方前進完成「第二個 V 字形 $(2, 3, 4)$ 」代表完成一個 2×2 區域的清掃，「第四個 V 字形 $(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$ 」代表完成一個 4×4 區域的清掃，若完成 $n \times n$ 區域的清掃所經過的「第 n 個 V 字形」的數字總和為 S_n ，試求 $S_n = ?$

答：

1	2	9	10	25	26
4	3	8	11	24	27
5	6	7	12	23	28
16	15	14	13	22	29
17	18	19	20	21	30
36	35	34	33	32	31

(接續下頁)