

101 學年度 國立成功大學與臺南一中高中科學班 第二階段甄選

數學科實作評量試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下作答說明：

1. 本試卷共二大題，第一大題填充題 10 題，每題 7 分；第二大題計算證明題 3 題，每題 10 分。
2. 請依題號於答案卷作答，填充題答案請寫在答案格內，否則不予計分。
3. 測驗時間從 15：10 到 16：40 共 90 分鐘。
4. 可利用試卷中空白部分計算，與答案不相關者不要在答案卷上書寫。
5. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
6. 交卷時請將答案卷與試題卷繳回，若攜出試場不予計分。

第一部份、填充題

1. 化簡 $\frac{(5^4 + 4)(9^4 + 4)(13^4 + 4)(17^4 + 4)(21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4)(15^4 + 4)(19^4 + 4)} = ?$

2. 正 $\triangle ABC$ 邊長為 6, D, E 分別在 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 上使得 $\angle ADE = 60^\circ$, 若 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$, 求 $\triangle ADE$ 面積為何?

3. 設 α 為正實數且不為整數, $\sqrt{7 + \sqrt{\alpha}} + \sqrt{7 - \sqrt{\alpha}}$ 為正整數, 則 $\alpha = ?$

4. 有一組正整數數列, 各項依序為 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 19,, 其規律為「相差 k 的有 k 個」, 則此數列的第 101 項為何?

5. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

(一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；

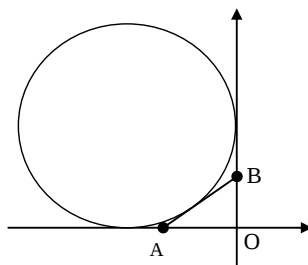
(二) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；

(三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並且人氣最旺的明星球員一定要先發（可擔任一壘手或右外野），其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有幾種先發守備陣容？（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）。

6. $x \geq 0$ ，解 $\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 4}) = 4 \\ \sqrt[3]{20 + x\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + y\sqrt{2}} = 4 \end{cases}$ ，則數對 (x, y) 為何？

7. 如下圖，A、B 坐標分別 $(-12, 0)$ 、 $(0, 5)$ ，今有一圓分別與 x 軸、y 軸及 $\overline{AB}$ 相切且此圓不在 $\triangle ABC$ 內部，求此圓圓心為何？



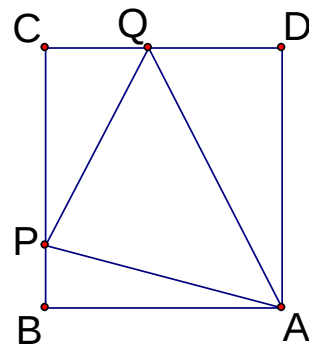
8. 正整數 n 為四位數，已知 $2n$ 有 30 個正因數， $3n$ 有 36 個正因數，則 n 最小為何？

9. 有一數列 $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_{2000} \dots$ ，除了第一項及末項外，每一項皆等於前後緊鄰兩項乘積少 1，例如： $a_2 = a_1 \times a_3 - 1, a_3 = a_2 \times a_4 - 1$ ，已知 $a_1 \neq 0$ 且 $a_2 = 2012$ ，若第 n 項 $a_n = 2012$ ， $n \leq 2000$ ，則 n 最大為何？

10. 拋物線 $y = x^2 + bx + c$ 通過點 $(-2, 5)$ ，此圖形交 x 軸於 A, B 兩點，交 y 軸於 C 點，其頂點為 M ，若四邊形 $ACMB$ 面積為 9，求數對 (b, c) 為何？

第二部份、計算證明題

1. 如右圖，邊長 9 的正方形 ABCD 中， $\angle PAQ = 45^\circ$ 且 $\overline{PQ} = 8$ ，試求 $\overline{PB}$ 長？.



2. x_i 為整數且 $-2 \leq x_i \leq 1$ ， $x_1 + x_2 + \dots + x_{2012} = -19$ ， $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2012}^2 = 199$ ，試求 $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2012}^3$ 最大及最小值？

3. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的中線， M ， N 分別在 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 上使得 $\angle MDN = 90^\circ$ ，若

$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2，求證：\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (2\overline{AD})^2$$