

數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 測驗時間為10：40～12：00，共80分鐘。
2. 本試卷共三大題（單選題10題、填充題4題、計算證明題3題），共計100分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液（帶）。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負，不得提出異議。
4. 填充題請將答案填入答案欄內，計算證明題請將完整解題過程和答案填入作答欄位內，否則不予計分。
5. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
6. 試卷及答案卷如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。
7. 測驗結束後，請將試題本放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

一、單選題：(每題 5 分，共 50 分。)

1. a 、 b 、 c 皆為整數，小明在計算二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之函數值時，得到以下結果， $f(1) = 4$ 、 $f(4) = 33$ 、 $f(8) = 109$ 、 $f(11) = 214$ ，若已知四個函數值中最多只有一個函數值計算錯誤，則下列敘述何者正確？

- (A) $f(1)$ 之值計算錯誤 (B) $f(4)$ 之值計算錯誤 (C) $f(8)$ 之值計算錯誤
(D) $f(11)$ 之值計算錯誤 (E) $f(1)$ 、 $f(4)$ 、 $f(8)$ 、 $f(11)$ 之值皆正確

2. 函數 $f(x)$ 滿足：

- (1) $f(1) = 5$ (2) $f(x + y) = 2f(x) \cdot f(y)$ ，對所有自然數 x 、 y 恆成立。

則 $\frac{f(3)}{f(1)} + \frac{f(13)}{f(11)} + \frac{f(113)}{f(111)}$ 之值為何？

- (A) 300 (B) 500 (C) 3030 (D) 5050 (E) 條件不足，無法得知

3. 設 P 為正方形 $ABCD$ 所在平面上一點，且 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$ 皆為等腰三角形，請問這樣的 P 點共有多少個？
(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 8 (E) 9

4. 設 a 、 b 、 c 、 p 、 q 、 r 均為實數且 $a > b > c$ 、 $p > q > r$ 、 $p + q + r = 0$ ，則下列何者錯誤？
(A) $p > 0$ (B) $r < 0$ (C) $ap + bq + cr > 0$
(D) $ar + bq + cp < 0$ (E) $ap > 0$

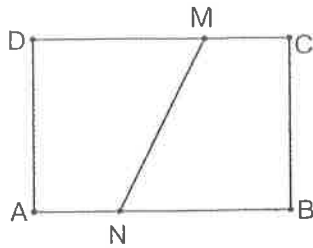
5. $2^{25} + 2^{20} + 2^{15} + 2^{10} + 2^5 + 1$ 有多少個質因數？

- (A) 4個 (B) 5個 (C) 6個 (D) 7個 (E) 8個

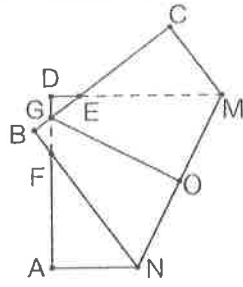
6. 老陳於下午三點多看手表後出門，到了晚上八點多回家再看手表，發現出門時及回家時之分針，時針位置恰在相反位置，假設他3點 x 分出門，8點 y 分回家；則下列何者正確？

- (A) $35 < x < 40$ (B) $15 < y < 18$ (C) x 、 y 所在分針位置夾角小於135度
(D) $x - y > 20$ (E) $x - y < 22$

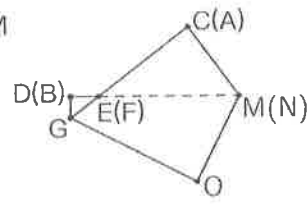
7. 如下圖一，有一張面積為 S 的長方形紙片 $ABCD$ ，點 M 在 $\overline{CD}$ 上，點 N 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AN} = \overline{CM}$ 。現將紙片 $ABCD$ 沿 $\overline{MN}$ 折疊，如下圖二， $\overline{BC}$ 分別與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{DM}$ 交於點 G 、 E ， $\overline{BN}$ 與 $\overline{AD}$ 交於點 F ，取 $\overline{MN}$ 中點 O ，連 $\overline{OG}$ ；再將紙片沿 $\overline{OG}$ 摺疊，如下圖三，點 A 、 B 、 F 、 N 分別落在點 C 、 D 、 E 、 M 的位置。



圖一



圖二



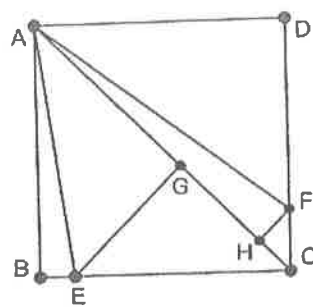
圖三

若兩次折疊後，得到的圖形 $CEDGOM$ 的面積為 $\frac{2}{7}S$ ，且 $\triangle EDG$ 與 $\triangle ECM$ 面積的總和為 $\frac{2}{5}$ ，則 S 值為何？

- (A) $\frac{36}{7}$ (B) $\frac{28}{5}$ (C) $\frac{31}{6}$ (D) $\frac{40}{7}$ (E) $\frac{32}{5}$

8. 設正整數 x 、 y 滿足 $\sqrt{x} + \sqrt{114} = \sqrt{xy + 114}$ ，則滿足條件之數對 (x, y) 有幾組？
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. 如右圖，正方形 $ABCD$ ， E 在 $\overline{BC}$ 上、 F 在 $\overline{CD}$ 上且 $\angle EAF = 45^\circ$ ， G 、 H 分別為 E 、 F 在 $\overline{AC}$ 上之垂足且 $\overline{AG} = 3$ 、 $\overline{AH} = 5$ ，則正方形 $ABCD$ 的邊長為何？
- (A) $\sqrt{15}$ (B) 4 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{6}$



10. 在三角形 ABC 中， $\overline{BC} = 2\sqrt{21}$ ，點 M 是 $\overline{BC}$ 中點， $\angle BAM = 120^\circ$ 、 $\angle CAM = 30^\circ$ ，則 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 之值最接近下列哪一個選項？
- (A) 8 (B) 8.5 (C) 9 (D) 9.5 (E) 10

二、填充題：(每題 5 分，共 20 分。)

1. 化簡 $\frac{1}{2+2^5} + \frac{1}{2^2+2^5} + \frac{1}{2^3+2^5} + \frac{1}{2^4+2^5} + \frac{1}{2^5+2^5} + \frac{1}{2^6+2^5} + \frac{1}{2^7+2^5} + \frac{1}{2^8+2^5} + \frac{1}{2^9+2^5} = ?$

2. 已知實數 a 、 b 、 c 滿足 $\begin{cases} a^2 - b^2 + 6a + 5b + 15 = 0 \\ b^2 + c^2 - 7b - 8c + 22 = 0 \end{cases}$ ，則 $a + b + c$ 之值為何？

3. 設 n 為自然數，在 $\frac{1}{n}$ 與 $n+1$ 之間插入 n 個正數，使所得數列成等比數列，則所插入的 n 個數的乘積為何？（請以 n 表示。）

4. $[x]$ 表小於或等於實數 x 的最大整數，例如： $[3] = 3$ 、 $[5.7] = 5$ 、 $\left[-2\frac{1}{3}\right] = -3$ ，

若 x 、 y 均為實數，試解聯立方程式
$$\begin{cases} [9x + 16y] = 7x + 11y + 5 \\ [2x + 4y] + [4x + 7y] = 5x + 8y + 7 \end{cases}。$$

【填充題答案欄】（每題 5 分，共 20 分。）

（請將填充題答案填入答案欄內，否則不予計分。）

1.	2.	3.	4.

三、計算與證明題：(第 1 題 5 分、第 2 題 15 分、第三題 10 分，共 30 分。)

(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性。)

1. 設 $f(x)$ 為 7 次多項式，滿足 $f(2^0) = 0$ 、 $f(2^1) = 1$ 、 $f(2^2) = 2$ 、 $f(2^3) = 3$ 、 $f(2^4) = 4$ 、 $f(2^5) = 5$ 、 $f(2^6) = 6$ 、 $f(2^7) = 7$ ，則多項式 $f(x)$ 的 x 項之係數為何？ (5 分)

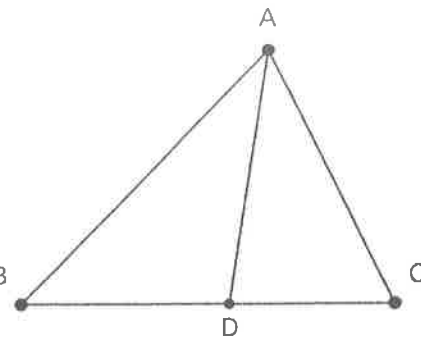
1. 作答欄：

2. 三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D ，則：

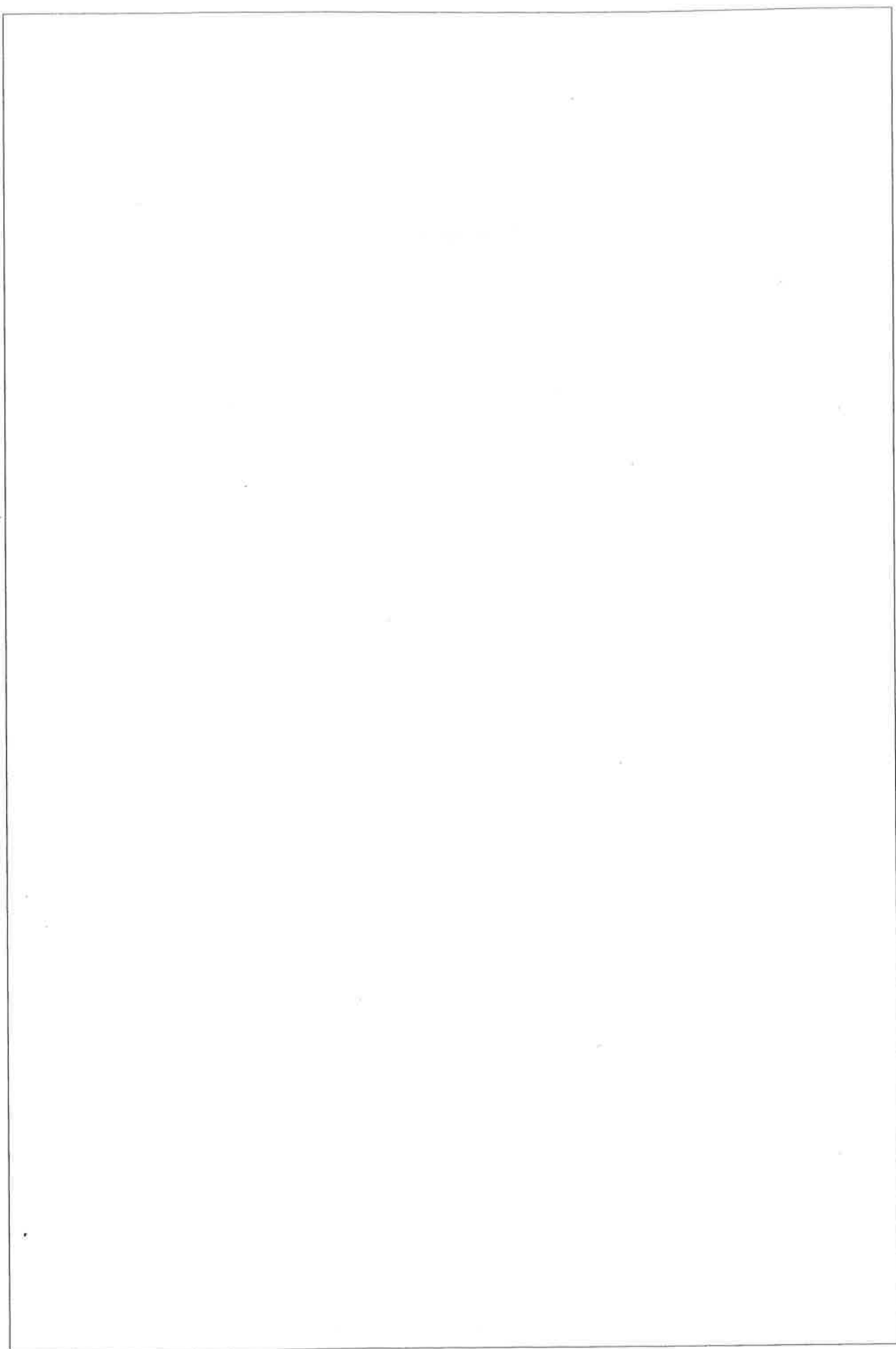
(1) 試證明 $\overline{DB}:\overline{DC} = \overline{AB}:\overline{AC}$ (5分)

(2) 試證明 $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{DB} \cdot \overline{DC}}$ (5分)

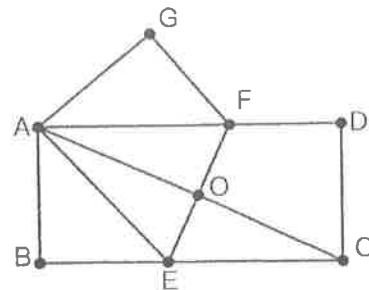
(3) 若 E 為 $\overline{BC}$ 上一點， $\overline{CE} = 5$ 、 $\overline{BE} = 6$ 、 $\overline{AC} = 10$ 且
 $\angle BAE = 2\angle EAC$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為何？ (5分)



2. 作答欄：



3. 如右圖，在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ，且 $a < b$ ，過長方形的中心 O 之直線與 $\overline{BC}$ 、 $\overline{DA}$ 分別交於點 E 、 F ，將四邊形 $ECDF$ 沿 $\overline{EF}$ 折至四邊形 $BEFA$ 所在平面，且使點 C 與點 A 重合，得四邊形 $EAGF$ 。



(1) 試證明五邊形 $ABEFG$ 的面積為 $\frac{a(3b^2 - a^2)}{4b}$ 。(5 分)

(2) 若 $a = 1$ ， b 為正整數，求五邊形 $ABEFG$ 面積的最小值。(5 分)

3. 作答欄：

《試題結束》