

數學科 試卷

請不要翻到次頁！
讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

1. 測驗時間為15：10～16：40，共90分鐘。
2. 本試卷共兩大題（填充題4題、計算證明題4題），共計100分。
3. 直接作答於此試卷中，填充題請將答案填入答案欄內，計算證明題請將完整解題過程和答案填入作答欄位內，否則不予計分。
4. 作答時不可使用計算機。
5. 試卷如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員。
6. 測驗結束後，請將試卷放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

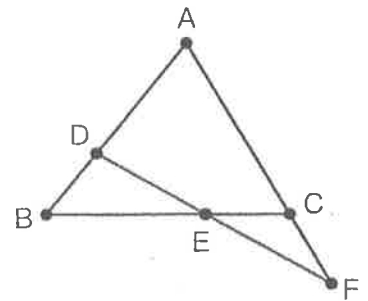
一、填充題：(每題 7 分，共 28 分。)

1. 9人結伴旅行，由相距90公里之甲市至乙市，今僅有一部汽車，由A擔任司機，載其餘四人，另四人步行，坐車者至乙市前 x 公里處下車，繼續步行向乙市，車子由立即折返載原先步行的四人到乙市，若車速60公里／小時，步行速率4公里／小時，剛好兩組人同時到達乙市，則他們由甲市到乙市共費時多少小時？

2. 從1、2、3、 $\dots$ 、2025這2025個數中選出 n 個數，使得這 n 個數中任何兩數之差均為合數，則 n 的最大值為何？

3. 若 x 、 y 皆為正整數，則 $x^3 - y^3 = 3xy + 53$ 之解為何？

4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上的點，
延長 $\overline{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 的延長線於點 F 。若 $\overline{BD} = \overline{CF} = 3$ ， $\overline{BE} \cdot \overline{CE} = 23$ ，則
 $\overline{DF}$ 長為何？



【填充題答案欄】（每題 7 分，共 28 分。）

（請將填充題答案填入答案欄內，否則不予計分。）

1.	2.	3.	4.

二、計算與證明題：（按各題配分給分，共 72 分）

（給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性。）

1. α 為一大於等於 1 之實數，且 $a^2 \leq \alpha < (a+1)^2$ ， a 為正整數，令 $\alpha = a^2 + b$ ，其中

$0 \leq b < 2a+1$ ，若 $\sqrt{\alpha}$ 有以下兩種近似值求法：

方法一： $\sqrt{\alpha} \approx a + \frac{b}{2a}$ ；方法二： $\sqrt{\alpha} \approx (a+1) - \frac{1+2a-b}{2(a+1)}$

(1) 試利用數學關係式說明此二種近似值法之由來。（8 分）

(2) 若 $e_1 = \left| \sqrt{\alpha} - \left(a + \frac{b}{2a} \right) \right|$ 、 $e_2 = \left| \sqrt{\alpha} - \left((a+1) - \frac{1+2a-b}{2(a+1)} \right) \right|$ ，試討論 b 的範圍與 e_1 、 e_2 兩者間大小之關係。（8 分）

1. 作答欄：

2. 在三角形 ABC 中，過 A 之高交 $\overline{BC}$ 於 H ， $\angle BAC$ 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D ， M 為 $\overline{BC}$ 上之中點，若 $\overline{AH}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AM}$ 的長度分別為以下三條線段長，請利用尺規作圖並詳細列出過程，作出三角形 ABC 。（12分）

————— $\overline{AH}$ 之長

————— $\overline{AD}$ 之長

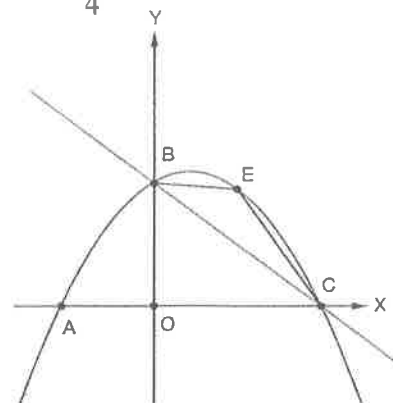
————— $\overline{AM}$ 之長

2. 作答欄：

3. 已知直線 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 與 x 軸交於點 C ，與 y 軸交於點 B 。拋物線 $y = ax^2 + \frac{3}{4}x + c$ 經過 B 、 C 兩點，且與 x 軸的第二個交點為 A 。

(1) 試求 a 、 c 之值。 (5 分)

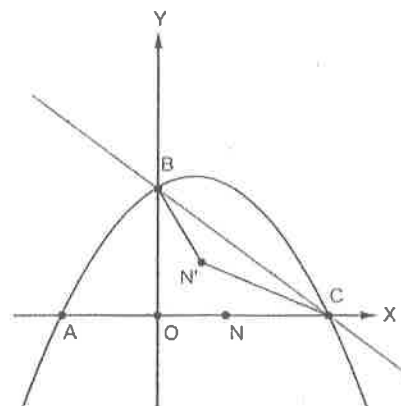
(2) 如右圖一， E 為直線 BC 右上方拋物線上的一動點，試求 $\triangle BEC$ 面積的最大值。 (7 分)



右圖一

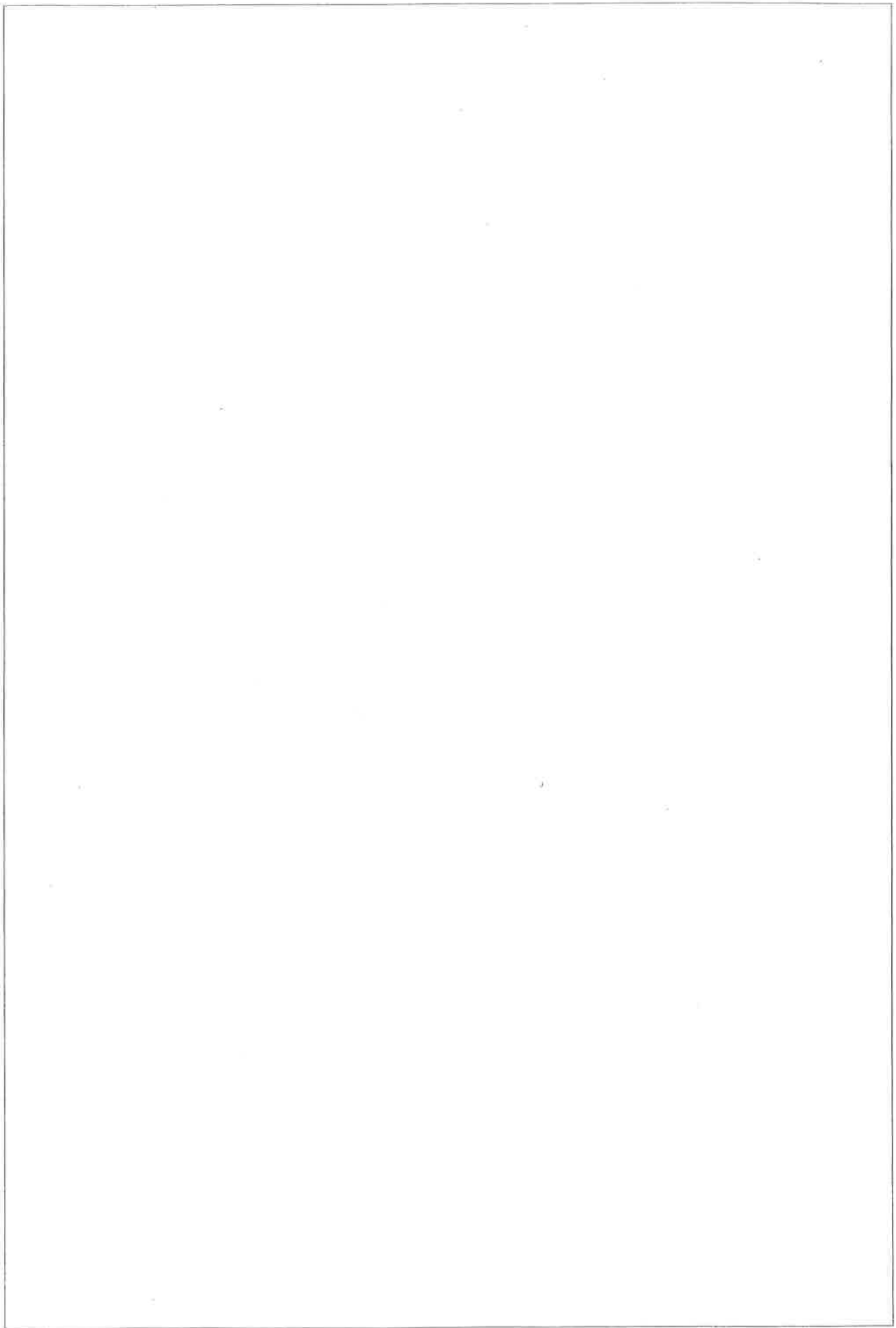
(3) 如右圖二，點 $N(1,0)$ ，現將 $\overline{ON}$ 繞點 O 逆時針旋轉一角度 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

得到 $\overline{ON'}$ ，求 $\overline{N'C} + \frac{1}{3}\overline{N'B}$ 的最小值。 (8 分)



右圖二

3. 作答欄：



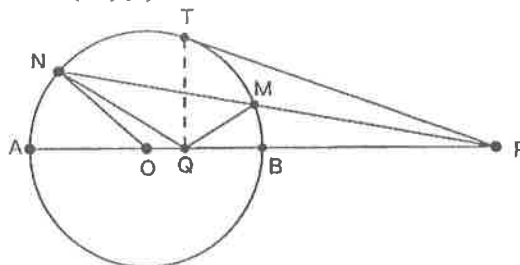
4. 如右下圖，平面上有一圓 O ， P 為圓外一點且 $\overrightarrow{OP}$ 交圓 O 於 A 、 B 兩點， $\overrightarrow{PT}$ 切圓 O 於 T 點， $\overrightarrow{PN}$ 為圓 O 之割線交圓 O 於 M 、 N 兩點，過 T 作 $\overrightarrow{AB}$ 之垂線其垂足為 Q ，試證明：

(1) $\triangle PNO \sim \triangle PQM$ (6分)

(2) $\triangle NQO \sim \triangle PQM$ (6分)

(3) ① $\overline{NQ} \cdot \overline{MQ} = \overline{QO} \cdot \overline{QP}$ ② $\overline{NO}^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OP}$ ③ $\overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PQ} \cdot \overline{PO}$ (6分)

(4) 若 $\overline{OA} = 3$ 、 $\overline{OP} = 9$ ，則 $\triangle QMN$ 面積最大值為何？ (6分)



4. 作答欄：

