

數學能力檢定試卷

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

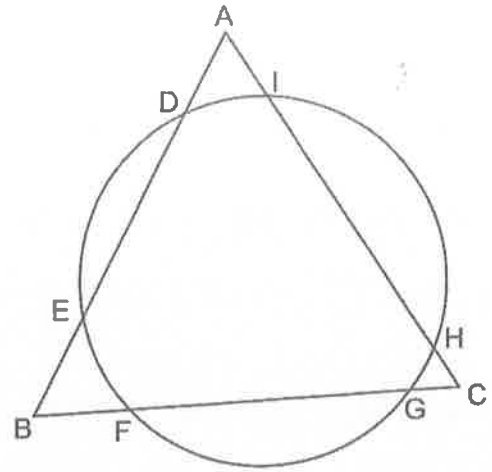
1. 測驗時間 10:40~12:00，共 80 分鐘。
2. 本試卷共三大題(選擇題 10 題、填充題 5 題、計算證明題 3 題)，共計 100 分。
3. 請將選擇題答案畫記於答案卡上，答案卡須用黑色 2B 鉛筆畫記，修正時請用橡皮擦將原畫記擦拭乾淨，不得使用修正液(帶)。答案卡如有畫記不清或汙損等情事，至電腦無法辨認者，其責任自負，不得提出異議。
4. 填充題和計算證明題請依說明書寫於答案本(卷)上，寫於試卷不予計分。
5. 可利用試卷中空白部分計算。
6. 本科目不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
7. 試卷及答案本(卷)如有印刷不清、缺頁、漏印或汙損等情形，請立即舉手告知監試委員，其餘一概不得發問。

一、單選題：(10 題，共 50 分)

1. 方程式 $xyz = 2021$ ，求整數解數對 (x, y, z) 共有多少組？(其中 x, y, z 未必是不同的數，且數對位置不同則視為不同的解) (A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 24 (E) 36
2. 連續 110 個正整數 a_1, a_2, \dots, a_{110} ，若其總和為 n^2 ，其中 n 為正整數，則 n 的最小值為何？
(A) 55 (B) 110 (C) 165 (D) 220 (E) 330。
3. 設 m, n 為整數，且多項式 $3x^3 + mx^2 - 24x + 12$ 被 $x^2 - 5x + n$ 所整除，試求 $m+n$ 之值為何？
(A) -8 (B) -7 (C) -6 (D) -5 (E) -4
4. 當 $x \neq 0$ 時，多項式 $f(x)$ 滿足 $4f(x) - x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 30$ ，則 $f(2021)$ 的值為何？
(A) 1070 (B) 2020 (C) 3060 (D) 4050 (E) 5030。
5. 已知 $\triangle ABC$ 邊長為公差 2 的整數，且最大角為最小角的 2 倍，求此三角形的邊長？
(A) 18 (B) 28 (C) 30 (D) 36 (E) 40
6. 連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為 a, b 。試問滿足 $3, a, b$ 恰為等腰三角形 (包含正三角形) 的三邊長之機率為何？ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{13}{36}$ (C) $\frac{7}{18}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{4}{9}$
7. 設 k 為正整數，若已知 $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ ，試求 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}}$ 的整數部份為何？ (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

1(後面還有試題)

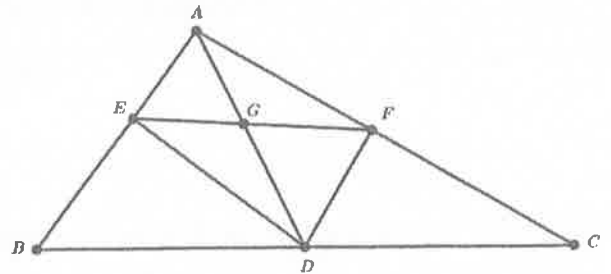
8. 如圖，一個圓交一個正 $\triangle ABC$ 於六個點，
 設 $\overline{AI} = 2$ ， $\overline{IH} = 13$ ， $\overline{HC} = 1$ ， $\overline{DE} = 7$ ，
 試求 \overline{FG} 之值為何？



- (A) $2\sqrt{22}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{15}$
 (D) 9 (E) $3\sqrt{10}$

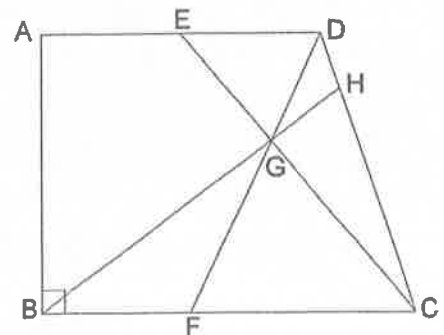
9. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 20$ ， $\overline{BC} = 28$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ 。D為 \overline{BC} 中點，
 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 於E， $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ 於F， \overline{AD} 與 \overline{EF} 交於G。則 $\frac{\triangle DEG \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}}$ 的值為何？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{28}$ (C) $\frac{7}{60}$ (D) $\frac{10}{123}$ (E) $\frac{15}{416}$ 。



10. 如圖，梯形ABCD中 $\angle B$ 為直角，E為 \overline{AD} 中點，且 $\overline{BF} : \overline{FC} = 2 : 3$ ，G為 \overline{EC} 與 \overline{FD} 交點， \overline{BG} 直線交
 \overline{DC} 於H，若 $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$ ，且 $\overline{BC} = 8$ ，求 $\frac{\triangle DGH \text{面積}}{\triangle GBF \text{面積}}$ 的值為何？

- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{2}{13}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{5}{26}$ (E) $\frac{8}{43}$ 。



二、填充題：(5題，共25分)

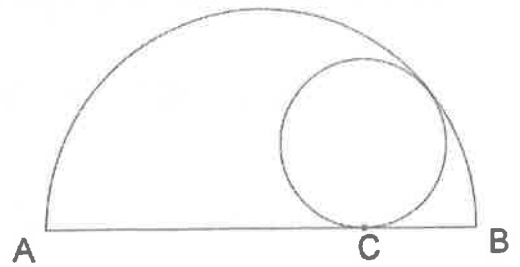
1. 小明請姊姊猜數碼 A, B 構成的兩位數相乘運算 $\overline{AB} \times \overline{BA} = (\quad)$ ，其中相同的字母代表相同的數碼，姊姊猜 196，小明說不只三位數而已，不過妳猜對了個位數且所有的數碼總和也相同。試推論出相乘後的答案 $(\quad) = ?$
2. 已知由 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 、 $g(x) = -x + 5$ 兩圖形所圍成的封閉區域 K ，若作直線 L 垂直 x 軸，分別與封閉區域 K 的邊界交於 P, Q 兩點，求在封閉區域內的 \overline{PQ} 長之最大值為何？
3. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 這些數中任意選出三個相異的數，不考慮選出的順序，試問有多少組數能滿足「三數乘積是一完全平方數」？(例如：3, 6, 8 即為符合條件的一組數。)
4. 已知 $f(x)$ 是 10 次多項式，若 $f(x) = 0$ 的 10 個根為 1×2 、 3×4 、 5×6 、 7×8 、 9×10 、 11×12 、 13×14 、 15×16 、 17×18 、 19×20 ，則 $f(x^2 + x) = 0$ 的 20 個根之總和為？
5. 平行四邊形 $ABCD$ 中， E 為 \overline{BC} 中點， \overline{AE} 與 \overline{BD} 交於 F 。若 $\overline{AB} = \overline{AE}$ ，且 $\overline{EF} : \overline{BE} : \overline{BF} : \overline{FD} = 1 : 2 : 2 : 4$ ，則 $\angle BDC = ?$

三、計算證明題：(3 題，共 25 分) (給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

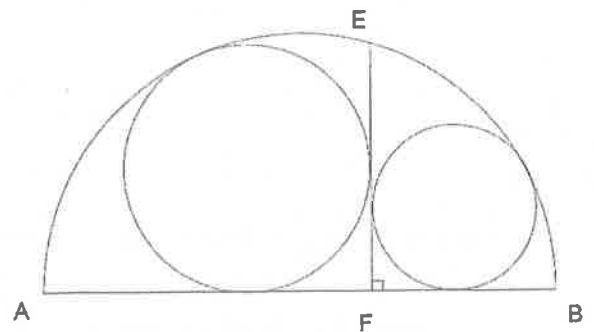
1. 小科一家人到迴轉壽司店用餐，店內用來盛放壽司的盤子有紅、銀、金 3 種顏色，單價分別為 40 元、60 元、80 元。小科一家人用完餐後，共拿了 30 個盤子，總金額是 1700 元。小科發現，其中一種顏色的盤子數量，是另外兩種顏色盤子數量之和。試問：小科一家人各種顏色的盤子各拿了幾個？(5 分)

2. (1)右圖的半圓內有一個內切圓與直徑 \overline{AB} 相切於 C 點，若小圓半徑 r ， $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ，

試證明： $r = \frac{ab}{a+b}$ (4 分)



- (2)右圖的半圓中 \overline{AB} 為其直徑，且 \overline{EF} 垂直 \overline{AB} ，又半圓內的兩個內切圓分別都和 \overline{EF} 相切，左右兩圓的半徑分別為 12 和 8，求直徑 \overline{AB} 的長？(6 分)



3. 如右圖，給定一個銳角三角形 $\triangle ABC$ ，其中 M 為 \overline{BC} 的中點。設圓 O 通過 A 且與 \overline{BC} 相切於 C 。若直線 AM 交圓 O 於 D ，連接 \overline{BD} 並延長此直線交圓 O 於另一點 E 。連接 \overline{AE} 。

試證：(1) $\triangle ABM \sim \triangle BDM$ (5 分)

(2) $\angle BAC = \angle CAE$ (5 分)

