

110 學年度 國立成功大學/臺南一中科學班甄選 實驗實作

數學科

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

1. 本試題共分兩大題，填充題(6題，共40分)，計算證明題(4題，共60分)合計100分。
2. 測驗時間 15:10~16:40，共90分鐘。
3. 作答時不可使用計算機，如有攜帶附計算功能之任何工具，請放在教室前後方地板上。
4. 填充題請務必將答案書寫於填充答案欄位，計算證明題直接將計算過程和答案書寫各題欄位中，並請分配好空間作答。
5. 本測驗不另外提供計算紙，請利用此試題本空白處作為計算用。
6. 測驗結束後，請將試題本放在桌上，待監考人員清點確認數量後，始可離開試場。

填充答案欄

一、填充題：(6題，共40分)

1	2	3	4	5	6
					(1)
					(2)

一、填充題：(6題，1-5 每題 6 分，第 6 題 4+6，共 40 分)

1. 若數列 a_1, a_2, \dots, a_{110} 中的每一項之值只能為 1 或 2 或 3，則 $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{110}$ ，即這 110 項的乘積，問可能的不同乘積值有_____個。

2. 設 p, q 為正數，如果方程式 $x^2 + px + 2q = 0$ 與 $x^2 + 2qx + p = 0$ 的解都是實數，試問滿足上述條件的 $p+q$ 之最小值為何？

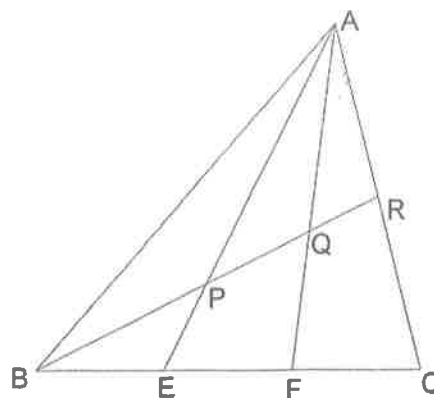
3. 在六邊形 $ABCDEF$ 中，各內角相等， $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = 1$ 且 $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FA} = r$ 。若 $\triangle ACE$ 的面積是六邊形 $ABCDEF$ 面積的 70%，試寫出所有可能的 r 值？

4. 平面上有相異 4 點 A 、 B 、 C 、 D ，已知 $\overline{AB} = 20$ 且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D 。若 C 滿足下列 2 個條件：

條件 1： $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$ 。條件 2： $5 \leq \overline{CD} \leq 10$ 。

則所有 C 點所形成的曲線長度為_____。

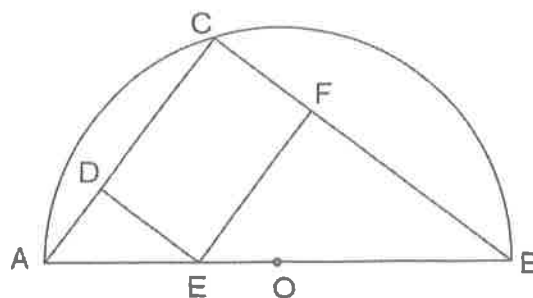
5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， E 、 F 三等分底邊 \overline{BC} ， R 為 \overline{AC} 的中點， \overline{AE} 及 \overline{AF} 將 \overline{BR} 分成三部分，問 $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QR}=?$



6. 如右圖， C 是以 \overline{AB} 為直徑的半圓 O 上的一點， D 、 E 、 F 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上一點，若四邊形 $DEFC$ 為一個矩形，且 $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{BC} = 12$ ，問

(1) 若 $\overline{CD}:\overline{DE} = 3:2$ ， $\frac{\Delta FEO \text{ 面積}}{\Delta ABC \text{ 面積}}$ 的值為何？(4 分)

(2) 當 E 點在 \overline{AB} 上滑動，則矩形 $DEFC$ 最大面積為多少？(6 分)



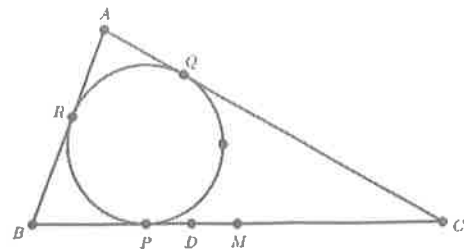
二、計算證明題：(4 題，共 60 分)

(給分原則是依據思考邏輯的嚴謹性與表達的清晰完整性)

1. 已知 $a < 0 < b < c$ ，試證：若 $\frac{a}{b+c}$ 、 $\frac{b}{a+c}$ 、 $\frac{c}{a+b}$ 均為整數，則 $a+b+c=0$ 。(10 分)

2. 如圖， $\triangle ABC$ 的內切圓分別切三邊於 P 、 Q 、 R 三點，又 M 為 \overline{BC} 中點， D 為 \overline{MP} 中點，

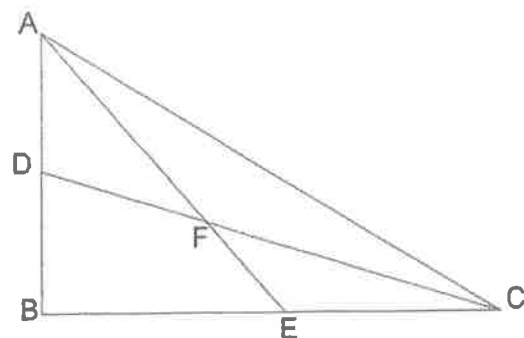
且 $2\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$ 。試證： \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 。(16 分)



3. 設 n 為不大於 1785 的正整數，求滿足 $1785+n$ 為 $1785 \cdot n$ 的因數的所有可能 n 值為那些？（16 分）

4. 小彬在日本廟宇看到如下圖的算額，目的是古人為感謝神明所呈上的奉獻，內容為一個數學問題及其絕妙的面積關係。請你幫他驗證這個算額的內容，以現在的語言表達如下：

- (1) $\triangle ABC$ 中，線段 \overline{AE} 及 \overline{CD} 交於 F ，若 $\triangle ADF$ 及 $\triangle CEF$ 的面積相同都等於 2，四邊形 $DBEF$ 面積為 4，問 $\triangle AFC$ 的面積為多少？（5 分）



- (2) 若 $\triangle ADF$ 及 $\triangle CEF$ 的面積都為 n ，四邊形 $DBEF$ 面積為 m ， $\triangle AFC$ 的面積為 x ，試以 m, n 表達 x 。（13 分）

