國立臺南一中 110 學年度第 2 學期第 3 次段考 高二科學班數學試題 【參考答案】

一、單選題

1.	5	2.	3	

二、多選題

1.	24	2.	125	3.	25
4.	1245	5.	12	6.	345

三、填充題

1.	166	2.	2 或 －1	3.	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
4.	$2\sqrt{2}$	5.	(0, 2, 0)	6.	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$
7.	($x<16$, 拒絕)			8.	-51

一、單選

1 由正弦定理：$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$，將 $\overline{BC}=13$，$\overline{AC}=20$，$\sin A=\frac{3}{5}$ 代入可解得 $\sin B=\frac{12}{13}$

又 ΔABC 為銳角三角形，故 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$ $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{63}{65}$

再一次正弦定理：$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$，代入可解得 $\overline{AB}=21$ 故選(5)。

<另解>

設 $\overline{AB}=x$，由餘弦定理可得：$13^2=20^2+x^2-2\cdot 20\cdot x\cdot\frac{4}{5}$，解得 $x=11$ 或 21

又若 $x=11$，則因為 $20^2>13^2+11^2$，得到 $\angle B$ 為鈍角，不合。因此 $x=21$ 故選(5)。

2 $\frac{C_0^4\cdot C_6^6+C_2^4\cdot C_4^6+C_4^4\cdot C_2^6}{(C_0^4+C_2^4+C_4^4)\cdot 2^6}=\frac{53}{256}$。

二、多選

1 $y=abx^2+bcx+ca=ab\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2+ca-\frac{bc^2}{4a}$ ⇒ 對稱軸為 $x=-\frac{c}{2a}$，與 y 軸交於（0，ca）

$y=acx+bc$ ⇒ 與 x 軸交於 $\left(-\frac{b}{a}，0\right)$，與 y 軸交於（0，bc）

(1) ╳：由二次函數圖形知 $ab>0$，與一次函數圖形交於 x 軸正向，不合
(2) ○
(3) ╳：由二次函數圖形知 $ab<0$，與一次函數圖形交於 x 軸負向，不合
(4) ○
(5) ╳：平行 x 軸的直線為常數函數，非一次函數 故選(2)(4)。

2 $\{A,B,C\}$為某一試驗樣本空間 S 之一分割，且 $P(A):P(B):P(C)=1:2:3$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{1+2+3}=\dfrac{1}{6}$，$P(B)=\dfrac{2}{1+2+3}=\dfrac{2}{6}$，$P(C)=\dfrac{3}{1+2+3}=\dfrac{3}{6}$，

$P(D|A)=\dfrac{P(D\cap A)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow P(D\cap A)=P(A)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$，

$P(D|B)=\dfrac{P(D\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow P(D\cap B)=P(B)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$，

$P(D|C)=\dfrac{P(D\cap C)}{P(C)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(D\cap C)=P(C)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，

(1) $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)=\dfrac{1}{3}$　(2) $P(B|D)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$

(3) $A\cap B=\varnothing$，$0=P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$，故事件 A 和 B 相依

(4) $P(B\cap D)=\dfrac{1}{12}$，$P(B)\cdot P(D)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}\Rightarrow P(B\cap D)\neq P(B)\cdot P(D)$，故事件 B 和 D 相依

(5) $\dfrac{1}{6}=P(D\cap C)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{6}=P(D)P(C)$，故事件 C 和 D 獨立　故選(1)(2)(5)。

3 (1)行列式值 $\det(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0$，∴不可逆　(2) $\begin{vmatrix}2009&2011\\2010&2012\end{vmatrix}\neq 0$，∴反方陣存在

(3)∵無限多組解，∴ $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}$不可逆

(4) $A^2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=-A$

(5) $\begin{vmatrix}ae+cf&be+df\\ag+ch&bg+dh\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ae&be\\ag&bg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}ae&df\\ag&dh\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}cf&be\\ch&bg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}cf&df\\ch&dh\end{vmatrix}=ad\begin{vmatrix}e&f\\g&h\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}f&e\\h&g\end{vmatrix}$

$=ad\cdot 3+bc\cdot(-3)=3(ad-bc)=3\cdot(-2)=-6$

[另解]

$\begin{bmatrix}ae+cf&be+df\\ag+ch&bg+dh\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，∴ $\begin{vmatrix}ae+cf&be+df\\ag+ch&bg+dh\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e&f\\g&h\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-6$。

4 方程式 $x^2-6x-n=0$ 的兩根為 $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+4n}}{2}=3\pm\sqrt{9+n}$，因為 $a_n>b_n$，所以 $a_n=3+\sqrt{9+n}$，$b_n=3-\sqrt{9+n}$

(1)○：對所有正整數 n，$a_n=3+\sqrt{9+n}>0$ 恆成立

(2)○：$a_{n+1}-a_n=\left(3+\sqrt{9+n+1}\right)-\left(3+\sqrt{9+n}\right)=\sqrt{10+n}-\sqrt{9+n}>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$

(3)╳：$a_n\times b_n=\left(3+\sqrt{9+n}\right)\times\left(3-\sqrt{9+n}\right)=9-(9+n)=-n$

(4)○：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{9+n}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{9}{n}+1}}{1}=1$

(5)○：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{9+n}}{\sqrt{n}}=2\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{9}{n}+1}}{1}=2\times 1=2$。

5 (1)○：$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(2)○：因為右極限：$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x|-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$，左極限：$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|-1}{x-1}=1$

(3)╳：因為右極限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，左極限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，所以$f'(0)$不存在

(4)╳：$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{|2x|}{x}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{2x}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{|2x|}{x}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{2x}{x}=2\end{cases}$，所以$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{|2x|}{x}=2$

(5)╳：因為$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$，且$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2+2)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^3+2)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，故$f'(0)$存在。又因為$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，

又$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & 當x\ge 0\\ x^3+2, & 當x<0\end{cases}$，$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\ 3x^2, & x<0\end{cases}$，所以$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$，所以$f'(0)=0$。

6

x		0		2	
$f'(x)$	+		−		+
增減	↗		↘		↗

↑極大值（$x=0$） ↑極小值（$x=2$）

設$f'(x)=ax(x-2) \Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+b$　$f''(x)=2ax-2a=2a(x-1) \Rightarrow$ 反曲點 x 坐標為 1

又$\int_0^2 f(x)\,dx=0$　∴反曲點為（1，0）

$\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0\\ f'(1)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{3}-a+b=0\\ -a=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$　所以$f(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f''(x)=6x-6$

(1)╳：$f(x)$ 在 $x=2$ 時有極小值
(2)╳：$f'(x)=3x(x-2)$ 沒有因式 $x+2$
(3)○：反曲點為（1，0）
(4)○：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-3x^2+2}=1$
(5)○：$f(0)=2$。

三、填充

1 ∵$x^2-3x-1=0$，且 $x\neq 0$　∴$x-\dfrac{1}{x}=3$　∴$x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=9\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=11$　∴$(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2=121\Rightarrow x^4+2+\dfrac{1}{x^4}=121$

$\Rightarrow x^4+\dfrac{1}{x^4}=119$ 而 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})(x^2+1+\dfrac{1}{x^2})=3(11+1)=36$　∴所求$=11+119+36=166$。

2 設公根為 t 則 $t^2-3t\cos\theta-2=0$…①　$t^2+6t\sin\theta+4=0$…②

①×2＋②　$3t^2-6t\cos\theta+6t\sin\theta=0 \Rightarrow 3t(t-2\cos\theta+2\sin\theta)=0$

∵ $t\neq 0$ ∴ $t-2\cos\theta+2\sin\theta=0 \Rightarrow t=2\cos\theta-2\sin\theta$

代入①得$(2\cos\theta-2\sin\theta)^2-3(2\cos\theta-2\sin\theta)\cdot\cos\theta-2=0$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta+4\sin^2\theta-8\sin\theta\cdot\cos\theta-6\cos^2\theta+6\sin\theta\cdot\cos\theta-2=0 \Rightarrow \sin^2\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta-2\cos^2\theta=0$

同除以 $\cos^2\theta$，得 $\tan^2\theta-\tan\theta-2=0 \Rightarrow (\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0$　∴ $\tan\theta=2$ 或 -1。

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Rightarrow 3bc\cos A=2ca\cos B=ab\cos C$

同時除以 $abc\Rightarrow\dfrac{3\cos A}{a}=\dfrac{2\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}\Rightarrow\dfrac{3\cos A}{\sin A}=\dfrac{2\cos B}{\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$\Rightarrow\tan A：\tan B：\tan C=3：2：1$ 令 $\tan A=3t$，$\tan B=2t$，$\tan C=t$

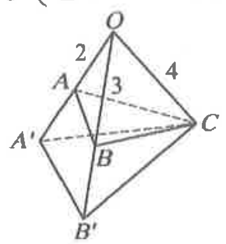
因 $A+(B+C)=180°$，且 $\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{3t}{1-2t^2}$

$\tan A$ 與 $\tan(B+C)$ 互為相反數 $\Rightarrow 3t+\dfrac{3t}{1-2t^2}=0$，解得 $t=1$ 得 $\tan A=3\Rightarrow\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$。

4 延長 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 使 $\overline{OA'}=\overline{OB'}=\overline{OC}$，又 $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=60°$，則 $O-A'B'C$ 為正四面體，

C 至 $\triangle OAB$ 距離 $=C$ 至 $\triangle OA'B'$ 距離 $=\dfrac{\sqrt6}{3}\times4=\dfrac{4\sqrt6}{3}$（正四面體的高）

四面體 $O-ABC$ 體積為 $\dfrac13$（$\triangle OAB$ 面積）$\times$高 $=\dfrac13\left(\dfrac12\cdot2\cdot3\cdot\sin60^\circ\right)\cdot\dfrac{4\sqrt6}{3}=2\sqrt2$。



5 設 $A(2,0,0)$，$B(0,4,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,4,2)=-2(1,-2,-1)$，

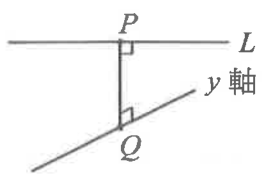
$L:\begin{cases}x=2+t\\y=-2t\\z=-t\end{cases}$ （t 為實數），令 $P(2+t,-2t,-t)$ 為直線 L 上一點，

在 y 軸上取一點 $Q(0,t',0)$，$\overrightarrow{PQ}=(-2-t,t'+2t,t)$，$\overrightarrow{N_L}=(1,-2,-1)$，$\overrightarrow{N_y}=(0,1,0)$，

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{N_L}=0\quad\Rightarrow\quad-2-t-2t'-4t-t=0\quad\Rightarrow\quad3t+t'=-1$……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{N_y}=0\quad\Rightarrow\quad t'+2t=0$……②

由①②　$\Rightarrow$　$t=-1$，$t'=2$，$\therefore Q(0,2,0)$，距離 L 最近之點為 $(0,2,0)$。



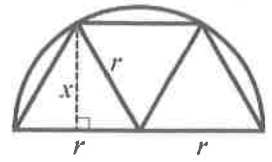
6 令梯形高為 $x\Rightarrow$ 上底 $=2\sqrt{r^2-x^2}$，所以梯形面積 $=\dfrac12(2\sqrt{r^2-x^2}+2r)\times x=rx+\sqrt{r^2-x^2}\times x$，

令 $f(x)=rx+\sqrt{r^2-x^2}\times x$，$0<x<r$

$\Rightarrow f'(x)=r+\sqrt{r^2-x^2}+x\times\dfrac12(r^2-x^2)^{-\frac12}\times(-2x)=r+\sqrt{r^2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$=\dfrac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\dfrac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$，

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt3}{2}r$，故所求面積最大值 $=\dfrac{\sqrt3}{2}r\times r+\sqrt{r^2-\dfrac34r^2}\times\dfrac{\sqrt3}{2}r=\dfrac{3\sqrt3}{4}r^2$。



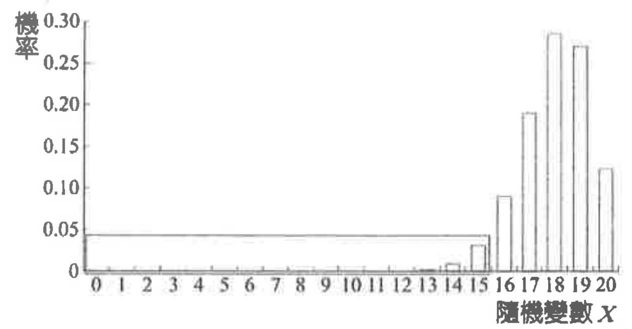
7 設隨機變數 X 表示快篩試劑準確次數，且令檢驗準確為成功，則成功的機率為 0.9，失敗的機率為 0.1，則 $X\sim B(20,9)$，

可得 X 的機率質量函數為 $P(X=k)=C_k^{20}(0.9)^k(0.1)^{20-k}$，$k=0$，1，2，……，20

得隨機變數 X 的機率分布表如表

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
x	7	8	9	10	11	12	13
$p(x)$	0.000000	0.000000	0.000001	0.000006	0.000053	0.000356	0.001970
x	14	15	16	17	18	19	20
$p(x)$	0.008867	0.031921	0.089779	0.190120	0.285180	0.270170	0.121577

隨機變數 X 的機率質量函數圖如圖



當隨機變數 X 的取值在 $X<16$ 時的機率和約為 $0.043174<\alpha=0.1$，故拒絕域為 $X<16$

依題意知，準確次數 $X=12$ 落在拒絕域內，故拒絕快篩試劑有 90% 以上的準確率的說法。

8 $\because x^6+x^4+x^2+1=0$ 之解為 α_1，α_2，……，α_6

$\therefore x^6+x^4+x^2+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_6)$

$\Rightarrow(2i+\alpha_1)(2i+\alpha_2)\cdots\cdots(2i+\alpha_6)$

$=(-2i-\alpha_1)(-2i-\alpha_2)\cdots\cdots(-2i-\alpha_6)$

$=(-2i)^6+(-2i)^4+(-2i)^2+1$

$=64i^6+16i^4+4i^2+1=-64+16-4+1=-51$。