

國立台南一中 113 學年 高二 期末考 數學試卷參考答案

一、多重選擇(每格 5 分，選擇錯一選項扣 1 分，共 20 分)

1	2	3	4
ABE	ABDE	D	ABCDE

二、填充題(每格 5 分，共 60 分)

1	2	3	4
$-\frac{3}{4}$	-2	(5, -8)	$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$
5	6	7	8(半對 3 分)
$\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$	(2, 10)	$(x-11)^2 + (y+2)^2 = 9$	$(\sqrt{3}, 0)$ 或 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
9	10	11	12
$G(\frac{7}{2}, 1)$	(1, 2)	$\frac{43}{64}$	400

三、計算題(8+12 分，共 20 分)

1. 令 A 為二階方陣，滿足 $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 $A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ 。(8 分)

解析： $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$(2 分)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore (PAP^{-1})^8 = (PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1}) \dots (PAP^{-1}) \\ = PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A \dots (P^{-1}P)AP^{-1} = PA^8P^{-1}$$

$$\therefore A^8 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^8 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -30 \\ 15 & -14 \end{bmatrix} \dots\dots (4 \text{ 分})$$

2. $\Gamma: |x| + 2|y| = 2$ ，先將 Γ 右移 1 單位和上移 1 單位後，再經矩陣 A 作一平面變換變成 Γ' ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

若 Γ 的中心為 P 點， P 經平面變換後變成 Γ' 的中心點 P' ，則

(1) P' 的坐標為 _____。(2) Γ' 的表示式為 _____。(3) Γ' 所圍的面積為 _____。

(每小題 4 分)

答案：(1) (1, 2) (2) $|x+y-3| + 2|x-2y+3| = 6$ (3) 12

解析： Γ 上任一點 (a, b) 移到 Γ' 上之點 (a', b') 滿足 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+1 \\ b+1 \end{bmatrix}$

$$\text{使 } \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{3}(a' + b' - 3), b = \frac{1}{3}(-a' + 2b' - 3)$$

$$\text{而由 } |a| + 2|b| = 2 \text{ 知 } |a' + b' - 3| + 2|-a' + 2b' - 3| = 6,$$

$$\text{即 } \Gamma': |x+y-3| + 2|x-2y+3| = 6,$$

$$\Gamma \text{ 的中心 } (0, 0), \text{ 由 } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ 得 } \Gamma' \text{ 的中心 } (1, 2),$$

(而另由兩直線 $x+y-3=0$ 與 $-x+2y-3=0$ 的交點為 Γ' 的中心 (1, 2))

$$\Gamma: |x| + 2|y| = 2 \Rightarrow \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{1} = 1 \text{ 可求得所圍面積為 } 4, \text{ 則 } \Gamma' \text{ 所圍的面積為 } 4|\det A| = 4 \times 3 = 12$$

一、多重選擇題

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & a+5 & 9 & b-15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & b-9 \end{bmatrix}$$

由第三列知：(1) $a \neq 1$ 時，方程組恰有一解

(2) $a = 1$ 且 $b = 9$ 時，方程組有無限多解

(3) $a = 1$ 且 $b \neq 9$ 時，方程組無解 故選 (A)(B)(D)(E)

$$3. (A) \times: \text{舉反例，取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 時，則 } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AC,$$

$$(B) \times: \text{舉反例，取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 時，則 } AB = B, \text{ 但 } A \neq I$$

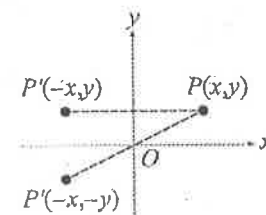
(C) $\times$: 矩陣乘法不滿足交換律，必須 $AB = BA$ 時，原式才會成立

$$(D) \circ: \text{令 } A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ 則 } \det(3A) = \begin{vmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 9 \det(A)$$

$$(E) \times: \text{舉反例，取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 時不會成立 故選 (D)}$$

$$4. (A) \circ: \text{因為 } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \text{ 所以面積不變 } (B) \circ: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix},$$

所以 $(x', y') = (-x, y) \Rightarrow$ 對稱 y 軸



(C) $\circ: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$, 所以 $(x', y') = (-x, -y) \Rightarrow$ 對稱原點

(D) $\circ: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$, 所以 $(x', y') = (y, x) \Rightarrow$ 對稱於 $x = y$

(E) $\circ: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{bmatrix}$, 所以 $x' = \frac{1}{2}x, y' = y \Rightarrow x = 2x', y = y'$

代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x'^2 + y'^2 = 1$ 表半徑為 1 的圓

二、填充題:

1. $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$

因此 $b = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$, 而 $a = \cos 2\theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{1}{2}c$

故 $2a + b - c = c + b - c = b = -\frac{3}{4}$

2. $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ 即 $(-1, 0, 4) = x(1, 2, 3) + y(2, 3, 1) + z(1, 1, k)$

得方程組 $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y+kz=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & k & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & k-3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & -3 \end{bmatrix}$

由方程組無解, 得 $k+2=0 \Rightarrow k=-2$

4. $M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = M \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) = M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow M \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

6. $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

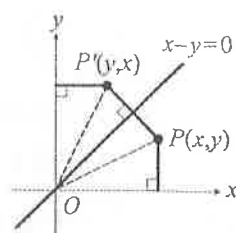
所以 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$.

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

所以, $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 得 $a=2, b=10$

7. $x-2y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{2}$

由 $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \frac{3}{5}$, $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} = \frac{4}{5}$, 得鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$



因此, 新圓心為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix}$, 半徑不變

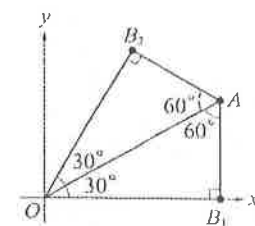
新圖形方程式為 $(x-11)^2 + (y+2)^2 = 9$

8. 由題意畫出附圖, 可知 B 可能有 2 點

$\overline{OA} = 2$, $\overline{OB} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

$B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ 故 B 點坐標為 $(\sqrt{3}, 0)$ 或 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$



9. 推移矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 設 $A(\frac{3}{2}, 0), B(0, 3)$, 則 $G(\frac{1}{2}, 1)$, 故 $\triangle O'A'B'$ 重心 $G(\frac{7}{2}, 1)$

10. $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} \end{cases}$, 可寫成矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{n-1} - b_{n-1} \\ 2a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

而 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 不變, 故 $\begin{bmatrix} a_{2025} \\ b_{2025} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

故數對 $(a_{2025}, b_{2025}) = (1, 2)$

11. 轉移矩陣 $T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 第三局結束的狀態為 $X_3 = TX_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43}{64} \\ \frac{21}{64} \end{bmatrix}$

因此, 第三局結束時, A 箱中恰為一紅一白球的機率為 $\frac{43}{64}$

12. 設甲生產線工人的比例為 a , 即乙生產線工人的比例為 $1-a$, 即 $X = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}$,

依題意得輪調所對應的轉移矩陣為 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

因為每週輪調後每條生產線上的工人總數不變, 所以 $AX = X$,

即 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}$, 得 $\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}(1-a) = a \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}(1-a) = 1-a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{7}$, 故 $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

故乙生產線的工人數為 $700 \times \frac{4}{7} = 400$ (人)。