台南一中 111 學年度第一學期高二第三次定期考試數學答案卷

班級:　　　座號:　　　姓名:

一、單選題：每題 4 分、共 24 分

1.	2.	3.	4.	5.	6.
A	D	B	E	D	E

二、多重選擇題：每題 5 分、共 25 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個以上得 0 分

1.	2.	3.	4.	5.
ADE	BC	ABE	ABDE	ABCDE

三、填充題：每題 4 分、共 44 分

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(\frac{3}{5},\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(0,-1)$	$3a-4b=2$	$x=\frac{4}{7}$ $y=\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$
7.	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	
19	$(4,-2)$	$(\frac{16}{37},\frac{12}{37})$	$\frac{25}{2}$	6	

四、計算題：每題 7 分、共 7 分（請詳細列出計算過程，否則不予計分）

1. 試以克拉瑪公式就 a 值討論聯立方程式 $\begin{cases}(a-3)x-2y=2a\\3x+(2a+1)y=-a-2\end{cases}$ 的解，並說明它的幾何意義。

$\Delta=\begin{vmatrix}a-3 & -2\\3 & 2a+1\end{vmatrix}=(a-3)(2a+1)+6=2a^2-5a+3=(2a-3)(a-1)$ (2 分)

$\Delta_x=\begin{vmatrix}2a & -2\\-a-2 & 2a+1\end{vmatrix}=4a^2+2a-2a-4=4(a-1)(a+1)$ (1 分)

$\Delta_y=\begin{vmatrix}a-3 & 2a\\3 & -a-2\end{vmatrix}=(a-3)(-a-2)-6a=-a^2-5a+6=-(a+6)(a-1)$。(1 分)

(1) $a\neq\frac{3}{2}$ 且 $a\neq1$ 時，聯立方程式恰有一組解，表示兩直線交於一點。(1 分)

(2) $a=\frac{3}{2}$ 時，聯立方程式無解，表示兩直線平行。(1 分)

(3) $a=1$，聯立方程式有無限多組解，表示兩直線重合(1 分)

備註：未寫出幾何意義不給分

一、單選題：每題 4 分、共 24 分

1. $\vec{OG}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{OB}=\frac{1}{3h}\vec{OP}+\frac{1}{3k}\vec{OQ}$ ∵ G，P，Q 共線　∴ $\frac{1}{3h}+\frac{1}{3k}=1$，即 $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3$

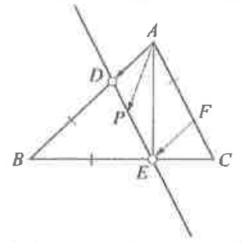
2. $\vec{n_1}=(2,1)$，$\vec{n_2}=(2,-1)$，所以 $\cos\theta=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{4-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\pm\frac{3}{5}$　（取“－”）

3. ∵ $(1+3t,4+t)//(5,-2)$ ∴ $\frac{1+3t}{5}=\frac{4+t}{-2}\Rightarrow -2-6t=20+5t\Rightarrow t=-2$

4. $\vec{OP}\cdot(\vec{OA}-\vec{OB})=(\vec{OC}+\vec{CP})\cdot\vec{BA}=\vec{OC}\cdot\vec{BA}+\vec{CP}\cdot\vec{BA}=\vec{OC}\cdot\vec{BA}=(\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB})\cdot(\vec{OA}-\vec{OB})$

$=\frac{1}{2}(|\vec{OA}|^2-|\vec{OB}|^2)=\frac{1}{2}(4^2-2^2)=6$

5. 當 $t=\frac{2}{3}$ 時，$\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{AF}=\vec{AE}$ 故 P 落在△ABC 的內部 $\Leftrightarrow 0<t<\frac{2}{3}$



6. $f(x)=3x-(x+1)+x^2-1=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$，最小值 -3

二、多重選擇題：每題 5 分、共 25 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個以上得 0 分

1. $\vec{GD}=\frac{2}{3}\vec{GB}+\frac{1}{3}\vec{GC}$，$\vec{GB}=\vec{GA}+\vec{AB}=\frac{-1}{2}\vec{AC}+\vec{AB}$，$\vec{GC}=\frac{1}{2}\vec{AC}$

∴ $\vec{GD}=\frac{2}{3}(\frac{-1}{2}\vec{AC}+\vec{AB})+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{2}{3}\vec{AB}-\frac{1}{6}\vec{AC}$　$r=\frac{2}{3}$，$s=-\frac{1}{6}$，$r+s=\frac{1}{2}$

2. $\vec{OA}=(8,0)$，$\vec{OB}=(10,2\sqrt{3})$，$\vec{OC}=(9,3\sqrt{3})$，$\vec{OD}=(8,3\sqrt{3})$

∵ $\vec{OD}=x\vec{OA}+y\vec{OB}$ ∴ $(8,3\sqrt{3})=x(8,0)+y(10,2\sqrt{3})\Rightarrow\begin{cases}8x+10y=8\\2\sqrt{3}y=3\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{7}{8}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$

3. (A) ○：兩向量垂直，其內積為 0，又 $\vec{w}$ 和 $\vec{v}$ 等長，故可取 $\vec{w}$ 為 $(\sqrt{5},-2)$ 或 $(-\sqrt{5},2)$

(B) ○：$\vec{v}+\vec{w}$ 與 $\vec{v}-\vec{w}$ 均為正方形的對角線，故(B) ○(C) ×

(D) ×：$|\vec{u}|^2=9(a^2+b^2)$，故 $\vec{u}$ 的長度 $=3\sqrt{a^2+b^2}$

(E) ○：$(1,0)=c(2,\sqrt{5})+d(\sqrt{5},-2)\Rightarrow\begin{cases}2c+\sqrt{5}d=1\\\sqrt{5}c-2d=0\end{cases}$，得 $c=\frac{2}{9}>0$

或 $(1,0)=c(2,\sqrt{5})+d(-\sqrt{5},2)\Rightarrow\begin{cases}2c-\sqrt{5}d=1\\\sqrt{5}c+2d=0\end{cases}$，得 $c=\frac{2}{9}>0$

4. (C) ×：$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a&2b\\2c&2d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}3a&3b\\3c&3d\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ ∴ $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a&2b\\2c&2d\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}3a&3b\\3c&3d\end{vmatrix}$

5. P 為△ABC 之重心　∴ $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$ Q 為△DEF 之重心　∴ $\vec{QD}+\vec{QE}+\vec{QF}=\vec{0}$，$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$，

$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=(\vec{AB}+\vec{BD})+(\vec{BC}+\vec{CE})+(\vec{CA}+\vec{AF})=(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})+\frac{1}{3}(\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{AB})=\vec{0}$

由 $\vec{QD}+\vec{QE}+\vec{QF}=\vec{0}$，得 $(\vec{AD}-\vec{AQ})+(\vec{AE}-\vec{AQ})+(\vec{AF}-\vec{AQ})=\vec{0}$，

$3\vec{AQ}=\vec{AD}+\vec{AE}+\vec{AF}=\frac{1}{3}(2\vec{AB}+\vec{AC})+\frac{2}{3}\vec{AC}+\frac{1}{3}\vec{AB}=\vec{AB}+\vec{AC}$

三、填充題：每題 4 分、共 44 分

1. 由 $\vec{CP}=x\vec{CA}+y\vec{CB}=x(\frac{4}{3}\vec{CD})+y\vec{CB}$ ∵ D，P，B 共線 ∴ $\frac{4}{3}x+y=1$

由 $\vec{CP}=x\vec{CA}+y\vec{CB}=x\vec{CA}+y(2\vec{CE})$ ∵ A，P，E 共線 ∴ $x+2y=1$ 得 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{1}{5}$

2. $|\vec{a}|=|t\vec{b}|$，$t>0\Rightarrow 5=25t$ ∴ $t=\frac{1}{5}$

3. $(a+1)\vec{AB}+(2a-b)(\vec{AC}-\vec{AB})+(a+b+2)(-\vec{AC})=\vec{0}$，$\Rightarrow(-a+b+1)\vec{AB}+(a-2b-2)\vec{AC}=\vec{0}$，

∴ $\begin{cases}-a+b+1=0\\a-2b-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$。

4. $\vec{OA}\cdot\vec{OC}=\vec{OB}\cdot\vec{OC}$，故 $3a-4b=2$

5. ∵ $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{□ABK面積}{□ACK面積}=\frac{3}{4}$ ∴ $\vec{AD}=\frac{3\vec{AC}+4\vec{AB}}{3+4}=\frac{4}{7}\vec{AB}+\frac{3}{7}\vec{AC}\Rightarrow x=\frac{4}{7}$，$y=\frac{3}{7}$

6. K 為△ABC 的外心，故 $\vec{AK}\cdot\vec{AB}=\frac{1}{2}|\vec{AB}|^2=\frac{1}{2}$

7. H 為△ABC 的垂心，故 $\vec{AB}\cdot\vec{AH}=\vec{AC}\cdot\vec{AH}=\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\frac{1}{2}(|\vec{AB}|^2+|\vec{AC}|^2-|\vec{BC}|^2)=19$

8. $|\vec{p}|=1\Rightarrow a^2+b^2=1$，$|\vec{q}|=3\Rightarrow x^2+y^2=9$

由<u>柯西</u>不等式，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2\Rightarrow 1\times 9\geq(ax+by)^2\Rightarrow -3\leq ax+by\leq 3\Rightarrow -2\leq ax+by+1\leq 4$

∴ $(M,m)=(4,-2)$

9. $\overline{AD}:\overline{DE}=\overline{BE}:\overline{EF}=\overline{CF}:\overline{FD}=3:1$

$\vec{AE}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AF}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}(\frac{1}{4}\vec{AC}+\frac{3}{4}\vec{AD})=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{16}\vec{AC}+\frac{9}{16}\vec{AD}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{16}\vec{AC}+\frac{27}{64}\vec{AE}$

$\Rightarrow\frac{37}{64}\vec{AE}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{16}\vec{AC}\Rightarrow\vec{AE}=\frac{16}{37}\vec{AB}+\frac{12}{37}\vec{AC}$ 故 $(a,b)=(\frac{16}{37},\frac{12}{37})$

10. 由 $3\vec{AB}+4\vec{AD}=5\vec{AC}$，可知 $\vec{AD}=\frac{1}{4}(5\vec{AC}-3\vec{AB})$……………①

由△$ABC=10$，可知 $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2}=10$，

$|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2=400$ ………②

將①代入②式，則 $|\vec{AB}|^2|\vec{AD}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AD})^2=\frac{25}{16}(|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2)=\frac{25}{16}\times 400$

∴ △ABD 面積 $=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{25}{16}\times 400}=\frac{25}{2}$

11. ∵ $\begin{vmatrix}a&b\\x&y\end{vmatrix}=ay-bx$

由<u>柯西</u>不等式知 $(a^2+b^2)\cdot(y^2+(-x)^2)\geq(ay-bx)^2$ ∴ $9\times 4\geq(ay-bx)^2$

故 $-6\leq ay-bx\leq 6$，最大值為 6