

一、填充題:12 題

【說明】: 1-8 題 每題 6 分, 9-12 題 每題 8 分, 共 80 分。

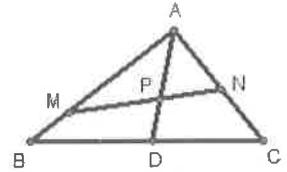
1. 實數 x 、 y 滿足 $x^2 + y^2 = 25$, 則 $\sqrt{6x+8y+50} + \sqrt{-6x+8y+50}$ 的最大值為 _____。

2. 設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c , 且 a, b, c 為方程式 $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 14x - 4\sqrt{5} = 0$ 的三根, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

3. 如右圖, $\triangle ABC$ 中, 點 M, N 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上, $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AN} = \beta \overrightarrow{AC}$, D 是 \overline{BC} 的中點, P 是 \overline{MN} 與 \overline{AD} 的交點。

若 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AD}$, 則 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{\beta^2}$ 的最小值為 _____。



4. 空間中有三個向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, 矩陣

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}, M^T \text{ 表矩陣 } M \text{ 之轉置矩陣。若滿足 } M \times M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

求 $|3\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}| =$ _____。

5. 設四面體六條稜長分別為 3、2、2、2、2、2, 則此四面體外接球半徑為 _____。

6. 求橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的外切矩形最大面積為 M , 最小面積為 m , 求 $(M, m) =$ _____。

7. 一袋中有 10 顆黑球, 開始時隨機由袋中取 2 顆球, 再放入 2 顆白球, 如此稱為一次操作, 今操作 4 次, 求袋中白球個數的期望值?

8. 用 1、2、3、4、5、6 組成一個五位數, 數字可重複, 若其中至少有三個不同的數字且數字 1 與 4 不相鄰的五位數有 _____ 個。

9. 平面上兩向量 \vec{a} 與 \vec{b} 夾角為 60 度，已知 $|\vec{a}|=16$ 、 $|\vec{b}|=10$ ，若向量 \vec{c} 使得 $\vec{a}-\vec{c}$ 與 $\vec{b}-\vec{c}$ 的夾角為 120 度，求 $|\vec{c}|$ 的最小值為 _____。
10. 若 $\sqrt{115^2+1}+\sqrt{115^2+2}+\sqrt{115^2+3}+\cdots+\sqrt{115^2+230}=n+\alpha$ ，其中 $n \in \mathbb{Z}$ ， $0 \leq \alpha < 1$ ，則 $n=?$
11. 設數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \geq 3$ 都滿足 $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ 。
已知 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 29$ ， $\sum_{n=1}^{20} a_n = 205$ ，求 $a_1 + a_2$ 之值。
12. 整數數對 (a, b, c) 滿足 $a \leq b \leq c$ 且 $a+b+c=-1$ ， $a^3+b^3+c^3+10(a+1)(b+1)(c+1)=2001$ ，求 $2a-b+3c=?$

二、計算題:3 題，每題 10 分，共 30 分。

【說明】：作答時請將題號標示清楚，寫出演算過程，否則不予計分。

1. 若存在三個相異實數 k 使得 $y=kx+3$ 與 $y=2x^3-6x^2+a$ 相切，

(1) 求實數 a 的範圍？

(2) 求滿足此條件的整數 a 與有理數 k 所代表的曲線與切線所圍的區域面積為？

2. 在複數平面上，試求曲線 $z^4+z=1$ 與曲線 $|z|=1$ 的交點個數。

3. 已知 x, y, z 為正數，滿足 $xy+yz+xz=1$ 且 $3(x+\frac{1}{x})=4(y+\frac{1}{y})=5(z+\frac{1}{z})$ ，求 y 之值？