國立台南一中 114 學年度第二學期高二第三次期中考試題

範圍：第三單元 矩陣與資料表格　　加考：直線與圓

一、單選題(每題 5 分，共 10 分)

1. (　　)試問下列選項中的矩陣乘積等於$\begin{bmatrix} 5b & 6a \\ 5d & 6c \end{bmatrix}$？

(A)$\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(D)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$　(E)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

2. (　　) 設矩陣 X 滿足，$X\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$且$X\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$，則矩陣 X 為下列哪一個選項？

(A)$\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} 9 & -\frac{1}{3} \\ 4 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$　(E)$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 16 & -3 \end{bmatrix}$

二、多選題(每題 5 分，錯一個選項扣 2 分，錯兩個選項扣 4 分，錯三個以上不予計分，共 15 分)

1. (　　) 設 A、B、C 均為二階方陣，I 為二階單位方陣，O 為二階零方陣，試選出正確的選項。

(A)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(B)$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

(C)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

(D)若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，則 $B=C$

(E)若 $B^3=-I$，則 $B^{2013}=-I$

2. (　　) 給定一圓心 $A(3,-1)$，半徑為 2 的圓 C，與一直線 $L: y=mx$，其中 $m<0$；已知直線 L 和圓 C 相交於 P、Q 兩點，以點 P、Q 為切點的兩切線互相垂直於 R 點。試選出正確的選項。

(A)ΔPAQ 的面積為 4　(B)在圓 C 上有 4 個點到直線 L 的距離等於 1

(C)$m=-\frac{1}{7}$　(D)$R(1,-3)$

(E)ΔPQR 的外接圓為 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

3. (　　) 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的位元 a、b、c、d 為等差數列且公差不為 0，B 為二階方陣且 $AB=P=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$，若 p、q、r、s 也是等差數列且公差也不為 0，試選出正確的選項。

(A) A 必有反矩陣　(B) B 可以是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　(C) B 可以是 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) B 可以是 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$　(E) B 可以是 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

三、填充題(每題 6 分，共 60 分)

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$，則 $3A-5B=$__________。

2. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A^2+A+I_2=pA+qI_2$，其中 p、q 為實數，則數對 $(p,q)=$__________。

3. 若矩陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足：a_{11}、a_{12}、a_{21}、$a_{22} \in \{-1\ ,\ 1\}$，且 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，則符合上述條件的矩陣共有________個。

4. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$A^{2026}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$__________。

5. 已知 A、B 皆為二階方陣，滿足 $A^2-4AB=O$，其中 O 為零矩陣。若 A、B 的乘法反方陣 A^{-1}、B^{-1} 皆存在，$A^{-1}+B^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，求 $c=$__________。

6. 設 P、Q、R 為二階方陣，已知 $PR=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$QR=\begin{bmatrix} -28 & -37 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$，且 $2P+Q=\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，若 $R=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$_____。

7. 設 a、b、c、d、e、f、g、h、i、j、k、l 均為實數。已知矩陣 $P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 2 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} i & j \\ 2 & 6 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} k & l \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$，則聯立方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=4 \end{cases}$，求 $x+y=$_____。

8. 假設張先生要傳“RAY AND KAI ”的訊息給朋友，雙方約定好用 01，02，……，26 分別表示 A，B，……，Z 並用 00 表示空格

A＝01	B＝02	C＝03	D＝04	E＝05	F＝06
G＝07	H＝08	I＝09	J＝10	K＝11	L＝12
M＝13	N＝14	O＝15	P＝16	Q＝17	R＝18
S＝19	T＝20	U＝21	V＝22	W＝23	X＝24
Y＝25	Z＝26				

這樣就能將訊息寫成密碼“180125011404110109”來取代“ RAY AND KAI”。但是這樣的做法容易被別人發現，為了保密，張先生找了一個 2 階方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，將密碼寫成矩陣 B $=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$的形式，再求出 $AB=\begin{bmatrix} 9 & 1 & 7 & 1 & 5 & 4 & 2 & 1 & 9 \\ 26 & 3 & 19 & 3 & 14 & 12 & 5 & 3 & 27 \end{bmatrix}$，然後才寫成密碼“092601030719010305140412020501030927”傳給朋友，如此張先生就不怕被別人知道到底在寫些什麼。某天，同學在無意之中撿到一張紙條，只見上面寫著一串數字“07210617041204120927０412”請你算出這組密碼所代表的意義為____________。

9. 崴崴想跟夢夢傳情，基於兩人非常害羞，擔心傳情過程中會被第三者發現，基於安全考量必須經常更換密碼，兩人約定用 2×4 矩陣 X 每行中各元之和的個位數字由左而右作為更改後的密碼，例如 $X=\begin{bmatrix} 2 & 13 & 77 & 26 \\ 9 & 10 & 14 & 38 \end{bmatrix}$代表密碼為 1314。為了確保密碼在傳送到對方時更安全，他們秘密約定如下。

（一）找一矩陣 $A=B+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，其中矩陣 B 沒有乘法反方陣。

（二）將 A 乘以 X 得矩陣 C，即 $AX=C$，然後將 B 的形式與 C 的結果傳給對方，當對方收到 C 後再作解碼的步驟，即可還原 X 而求出更改後的密碼。已知矩陣 $B=\begin{bmatrix} 4 & x+6 \\ 1 & x \end{bmatrix}$，

若崴崴傳送矩陣 $C=\begin{bmatrix} 40 & 109 & 116 & 127 \\ 20 & 41 & 28 & 47 \end{bmatrix}$，則更改後的新密碼為__________。

10. $J=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\left(I+\dfrac{1}{3}J\right)^5=aI+bJ$，求$(a,b)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

四、非選題

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

圓C和直線$L:y=2$相切且過點$A(2,4)$，圓C的圓心為(a,b)。

11. 圓心(a,b)必落在下列哪一個圖形上？（單選題，5 分）

（A）$y=\dfrac{1}{4}x^2-3x+8$　（B）$y=\dfrac{1}{4}x^2-2x+6$　（C）$y=\dfrac{1}{4}x^2-x+4$

（D）$y=\dfrac{1}{4}x^2+2$　（E）$y=\dfrac{1}{4}x^2+x$

12. 求圓C的半徑最小值。（非選題，4 分）

13. $A(2,4)$是圓C上距離$P(-6,-2)$最近的點，求圓C的標準式。（非選題，6 分）

《參考答案》

一、單選題

1	2
D	C

二、多選題

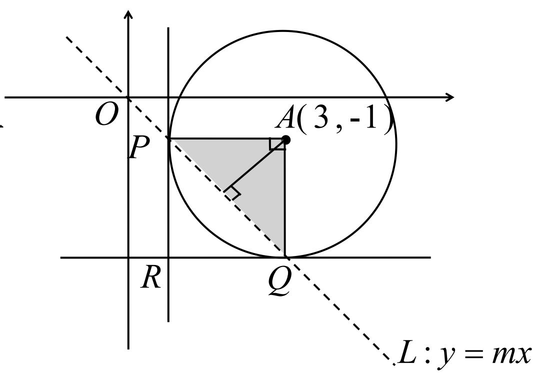
1	2	3
E	D E	A D E

三、填充題

1	2	3	4	5
$\begin{bmatrix}3&-5&6\\-21&21&-2\end{bmatrix}$	$(1,9)$	8	-2	$\dfrac{3}{8}$
6	**7**	**8**	**9**	**10**
7	6	GOD DID	5720	$\left(1,\dfrac{31}{3}\right)$

《參考詳解》

二、多選題



2. (A)X: ΔPAQ的面積為2

(B)X: 圓心到直線L的距離為$\sqrt{2}$，在圓C上僅有2個點到直線L的距離等於1

(C)X: 由點到直線的距離$d(A,L)=\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

(D)O: 直線L的方程式為$y=-x$　，且R為圓心對直線L的對稱點，$R(1,-3)$

(E)O: ΔPQR為外接圓為以$\overline{AB}$為直徑的圓，方程式為$(x-2)^2+(y+2)^2=2$

3. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a+k \\ a+2k & a+3k \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=2k^2\neq 0$

(B) X: $AB=\begin{bmatrix} 4a+3k & 6a+4k \\ 4a+11k & 6a+16k \end{bmatrix}$ (C) X: $AB=\begin{bmatrix} 2a+k & 2a+k \\ 2a+5k & 2a+5k \end{bmatrix}$

(D)O: $AB=\begin{bmatrix} 2a-k & 2a+k \\ 2a+3k & 2a+5k \end{bmatrix}\Rightarrow$公差$=2k$ (E)O: $AB=\begin{bmatrix} 3a-2k & 3a+k \\ 3a+4k & 3a+7k \end{bmatrix}\Rightarrow$公差$=3k$

三、填充題

5. $A^2=4AB \Rightarrow A=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4}A$，左右同乘$A^{-1}$和$B^{-1}$，可得

$A^{-1}BB^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}AB^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}B^{-1}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

6. $2PR+QR=(2P+Q)R=\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}R=\begin{bmatrix} -28 & -39 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

7. 合併兩式可得$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} -6 & 33 \\ 3 & -11 \end{bmatrix}$，原式$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

將$\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=-\frac{1}{33}\begin{bmatrix} -11 & -33 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}B=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 4 & 9 & 4 \\ 21 & 17 & 12 & 12 & 27 & 12 \end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$，GOD DID

9. $B=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，$X=A^{-1}\begin{bmatrix} 40 & 109 & 116 & 127 \\ 20 & 41 & 28 & 47 \end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 0 & 9 & 20 & 11 \\ 5 & 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

10. $\left(I+\frac{1}{3}J\right)^5=C_0^5 I+C_1^5\left(\frac{1}{3}J\right)+C_2^5\left(\frac{1}{3}J\right)^2+C_3^5\left(\frac{1}{3}J\right)^3+C_4^5\left(\frac{1}{3}J\right)^4+C_5^5\left(\frac{1}{3}J\right)^5$

已知$J^n=3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，原式$=I+\frac{5}{3}J+\frac{10}{3}J+\frac{10}{3}J+\frac{5}{3}J+\frac{1}{3}J=I+\frac{31}{3}J$

四、非選題

11. $d(C,L)=\overline{CA}\Rightarrow |b-2|=\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x^2-x+4$

12. 由上述可知，$b=\dfrac{1}{4}a^2-a+4$，半徑為$|b-2|$

$|b-2|=\left|\dfrac{1}{4}a^2-a+4-2\right|=\left|\dfrac{1}{4}(a-2)^2+1\right|$，當$a=2$時，圓$C$的半徑會有最小值1

13. $m_{\overline{AP}}=\dfrac{3}{4}$，令$\overline{AD}=4t$，則$\overline{BD}=3t$，$\overline{AB}=5t$，因此$\overline{BE}=\overline{AB}=5t$，$\overline{DE}=2t$

因此D的y坐標為4，因此$\overline{DE}=2\Rightarrow t=1$，$B(2+4,4+3)=(6,7)$，半徑為5