國立台南一中 114 學年度數學科第二學期第三次段考高二數 A 詳解卷

一、多重選擇題:全對 6 分，錯 1 個選項 4 分，錯 2 個選項 2 分，其餘或不作答不給分

1.	2.
ABC	BDE

二、填充題: (每題 5 分，共 75 分) 全隊才給分

3.	4.	5.	6.	7.
$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}$	$(\frac{-2}{3},0)$	24	$\frac{22}{75}$
8.	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
$(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$	$\frac{5}{27}$	26	$\frac{11}{30}$	$\frac{9}{10}$
13.	**14.**	**15**	**16.**	**17**
1	$(2,10\sqrt{3})$	$\frac{5}{21}$	$\frac{769}{13}$	$(1,\frac{665}{128})$

三、計算證明題 (共 13 分)

(1) $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}y_n$ ， $y_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n$ (2 分) $\therefore A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (2 分)

(2) $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}y_n$ 又 $x_n+y_n=1\therefore x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}(1-x_n)=\frac{-1}{3}x_n+\frac{2}{3}\therefore(p,q)=(\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$ (3 分)

(3) $A^6=A^2A^2A^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{41}{81}&\frac{40}{81}\\\frac{40}{81}&\frac{41}{81}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{365}{729}&\frac{364}{729}\\\frac{364}{729}&\frac{365}{729}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x_6\\y_6\end{bmatrix}=A^6\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{365}{729}\\\frac{364}{729}\end{bmatrix}$ $\therefore x_6=\frac{365}{729}$ (3 分)

法二: 6 偶　4 偶 2 奇　2 偶 4 奇　6 奇 四種可能

$$x_6=C_6^6(\frac{1}{3})^6+C_4^6(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^2+C_2^6(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^4+C_0^6(\frac{2}{3})^6=\frac{1+60+240+64}{729}=\frac{365}{729}$$

法三: (2)的遞迴式慢慢代 $1\to\frac{1}{3}\to\frac{5}{9}\to\frac{13}{27}\to\frac{41}{81}\to\frac{121}{243}\to\frac{365}{729}$

(4) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{a+2b}{3}=a\Rightarrow a=b$ (2 分) 又 $a+b=1+0=1$ $\therefore\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (1 分)

2. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 表鏡射$\Rightarrow A^{-1}=A$，$A^2=I$

$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$表旋轉$\Rightarrow B^6=I$

(A) $AB=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(B) $A^2B=IB=B$, $BA^2=BI=B$

(C) $A^3B^3=AB^3$, $B^6A^3=A$ (D) $A^3B^6=A$, $B^6A^3=A$

(E) $(ABA)^{10}=ABAABAABA......ABA=ABIBIBI.....BA=AB^{10}A$ $\therefore$ BDE

3. 週期 3 : $A^{2026}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

4. $X\begin{bmatrix}3&2\\7&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&10\\29&18\end{bmatrix}$ $\therefore X=\begin{bmatrix}16&10\\29&18\end{bmatrix}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-7&3\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&-2\\-10&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}$

5. $L:2x+3y=6$ 上 2 點 $(3,0),(0,2)$ 經 $\begin{bmatrix}2&b\\a&1\end{bmatrix}$ 轉換後的點 $(6,3a),(2b,2)$ 帶入 L 得到

$\begin{cases}12+9a=6\\4b+6=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\\b=0\end{cases}$

6. $AB=R_{120^0}R_{(-45^0)}=R_{75^0}$ $\therefore 75n=360k\Rightarrow 5n=24k$ $\therefore n$ 之最小值為 24

7. 轉移矩陣為$\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，一次：$\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$，二次：$\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{53}{75}\\\frac{22}{75}\end{bmatrix}$

8. $y=-\sqrt{3}x \Rightarrow$ 斜率 $\tan\theta=-\sqrt{3} \Rightarrow$ 斜角 $\theta=-60^\circ$

$$\therefore M_{(-60^0)}=\begin{bmatrix}\cos 2(-60^\circ) & \sin 2(-60^\circ)\\ \sin 2(-60^\circ) & -\cos 2(-60^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$P'=M_{(-60^0)}P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

9. $(6,4,1)(5,3,2)(5,5,1)(5,4,2)(5,3,3)(4,4,3)$ 排列數為 27

其中 第 1 次出現 3 點的排列數為 5 $\quad\therefore \frac{5}{27}$

10. $1-(\frac{5}{6})^n>0.99 \Rightarrow (\frac{5}{6})^n<0.01 \Rightarrow n(0.6990-0.7781)<-2 \Rightarrow n>25.2$ $\quad n$ 最小 26

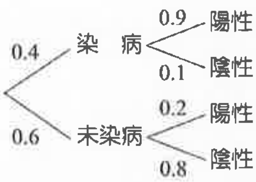
11. $P=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{30}$

12. $P=\frac{0.2\cdot 0.8\cdot 0.9}{0.2\cdot 0.8\cdot 0.9+0.8\cdot 0.2\cdot 0.1}=\frac{144}{160}=\frac{9}{10}$

13. 所求區域面積為 S 令 $x'=x+2y, y'=2x+6y$

則 $|x'|+|y'|\le 1$ 區域面積為 $S'=2$ 由線性轉換面積公式得到 $S'=2=|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}|\times S=2S$ $\quad S=1$

14. $2\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 2\sqrt{3}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 2\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 10\sqrt{3}\end{bmatrix}$



15. $P=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{21}$

16. $p_1=\frac{0.4\times 0.1}{0.4\times 0.1+0.6\times 0.8}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

$p_2=\frac{0.4\times(0.1)^3}{0.4\times(0.1)^3+0.6\times(0.8)^3}=\frac{4}{4+3072}=\frac{1}{769}$ $\quad$ 故 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{769}{13}$

17. $J^2=2J \therefore J^n=2^{n-1}J$

$(I+\frac{J}{4})^6=C_0^6 I+C_1^6\frac{J}{4}+C_2^6\frac{J^2}{4^2}+\ldots\ldots+C_6^6\frac{J^6}{4^6}=I+C_1^6\frac{J}{4}+C_2^6\frac{2J}{4^2}+\ldots\ldots+C_6^6\frac{2^5 J}{4^6}$

$=I+\frac{J}{2}[C_1^6\frac{1}{2}+C_2^6\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+C_6^6\frac{1}{2^6}]$ $\quad$ 又 $(1+\frac{1}{2})^6=C_0^6+C_1^6\frac{1}{2}+C_2^6\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+C_6^6\frac{1}{2^6}$

$\therefore (I+\frac{J}{4})^6=I+\frac{J}{2}[(1+\frac{1}{2})^6-1]=I+\frac{665}{128}J$