

國立臺南第一高級中學一一〇學年度第二次教師甄選初試

數學科試題

一、多重選擇題(共 1 題，5 分，全對得 5 分，只錯一選項得 3 分，其餘不給分)

1. 已知 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，請選出正確的選項：

(A) $a_n > c_n$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ (B) $a_n = d_n$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ (C) $a_6 = 364$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n$ 必可表示成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式，其中 p 、 q 、 r 、 s 是實數

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = 1$

二、填充題(共 17 題，每題 5 分，全對才給分)

1. 一箱中有相同的紅球 30 顆、相同的白球 10 顆，現自箱中取球，一次取一顆，取後放回，每顆球被取到的機率相同，直至取到白球即停止。令 X 等於取球的次數，求 X 的變異數 = _____。

2. 已知 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = -6$ ， $\vec{c} \cdot \vec{a} = -3$ ，則 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ _____。

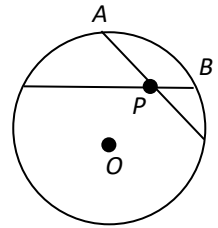
3. 設 $a < b < c$ ，若方程式 $2(x-b)(x-c) - (x-a)^2 = 0$ 之二根為 α ， β 且 $\alpha < \beta$ ，請將 a ， b ， c ， α ， β 由小至大依序寫出。

4. 設 a 、 b 、 k 皆為實數，在坐標平面上，已知函數 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30x + k$ 的圖形可由 $g(x) = ax^3 + bx$ 的圖形平移而得，且它們的形狀、大小均相同，若這兩個圖形恰有一個交點，則 k 值為 _____。

5. 設 t 、 s 皆為實數，已知方程式 $x^2 + tx + s = 0$ 有兩實根為 α 、 β ，且 $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2$ ，若滿足如此條件的所有數對 (s, t) 在 xy 平面上的圖形為 T ，則 T 繞 x 軸旋轉一圈所得旋轉體的體積為 _____。
6. 一盒中有 2 個相同的白色球、以及紅、藍、綠色球各一個，每次從中任取一球，取後不放回，每顆球被取到的機率相同，直到紅、藍、綠 3 個色球全部取出為止。令隨機變數 X 表示取球的次數。試求 X 的期望值 = _____。
7. 在 $x \geq y \geq z \geq -2$ 且 $3x + 2y - z = 4$ 的條件下， $x + 2y + z$ 的最大值為 M ，此時 $x + y + z$ 的值為 a ，則數對 $(M, a) =$ _____。
8. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 1$ ，若 $y = f(x)$ 與直線 $y = x + k$ 有三個相異交點，則實數 k 值的範圍為 _____。
9. 設 A 、 B 是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的兩個不同子集，若集合 A 不是集合 B 的子集，且集合 B 不是集合 A 的子集，則不同的有序集合組 (A, B) 有 _____ 組。
10. 設 a 、 b 、 c 為異於 1 且兩兩互異的三正數，若 a 、 b 、 c 成等比數列，且 $\log_c a$ 、 $\log_b c$ 、 $\log_a b$ 成公差為 α 的等差數列，則 α 值為 _____。
11. 若圓 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上有一動點 P ， P 在 x 軸上的投影點為 A ， P 在 y 軸上的投影點為 B ，則直線 AB 的斜率最大值 = _____。
12. 若 x 的一元二次方程式 $x^2 - 3x \cos \theta - 2 = 0$ 與 $x^2 + 6x \sin \theta + 4 = 0$ 有一相同根，求 $\tan \theta$ 之值 = _____。

13. 如圖，過圓 O 上兩點 A 、 B 分別作圓 O 的割線，此兩條割線夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 且相交於 P 點。

若圓 O 的半徑為 7 且 $\overline{AP} = 5$ ， $\overline{BP} = 3$ ，試求 \overline{OP} 之值為 _____。

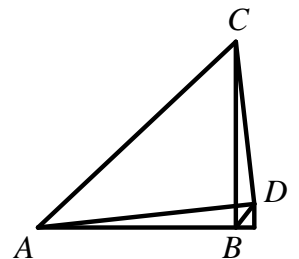


14. 四面體 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的兩面角為 60° ，若此四面體內一點 P 到 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的距離分別為 $\frac{3}{2}$ 與 2，則點 P 到直線 BC 的距離為 _____。

15. 若 A 為曲線 $\Gamma_1: x^2 + 4x + y + 3 = 0$ 上一點， B 為曲線 $\Gamma_2: y^2 - x - 4y + 3 = 0$ 上一點，求 \overline{AB} 的最小距離 = _____。

16. 若複數 z 滿足 $|z - \sqrt{3}| + |z + \sqrt{3}| = 4$ ，則 $|z + i|$ 的最大值為 _____。

17. 如圖， $\overline{AC} = \overline{AD}$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAD = \alpha$ ， $\angle CBD = \beta$ ， $\angle CAB = \gamma$ ，
若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{5}{13}$ ，則 $\tan \gamma$ 之值 = _____。



三、計算題(共 1 題，10 分，請列出計算過程，否則不予給分)

1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{3}{2}$ ， $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + (n-1)}$ ($n \geq 2$)，求 a_n 的一般項 (以 n 表示之)。